Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФИЗИКА

А. Закон Кулона

Поле точечного заряда

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \qquad \mathbf{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)\ . \qquad (*1)$$

Пусть заряды $Q_i, i = 1, 2, ..., N$ расположены в точках $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Обозначаем координаты точки, в которой нас интересует поле как (X, Y, Z).

Тогда из i-ого заряда в эту точку идет вектор $\mathbf{R}_i$

$$(X - x_i, Y - y_i, Z - z_i) = \mathbf{R}_i\ .$$

Суммарное поле $\mathbf{E}(X, Y, Z)$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{E}(X, Y, Z) = \sum_i^N \mathbf{E}_i = \sum_i^N \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^N Q_i \frac{(X - x_i)\mathbf{e}_1 + (Y - y_i)\mathbf{e}_2 + (Z - z_i)\mathbf{e}_3}{[(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2 + (Z - z_i)^2]^{3/2}} . \quad (*2)$$

На основании этой формулы легко можно написать формулу, по которой нужно считать электростатические поля в случае непрерывного распределения зарядов с плотностью $\rho(x, y, z)$:

$$Q_i \Longrightarrow dQ = \rho(x, y, z)dV = \rho(x, y, z)dxdydz,$$

$$\mathbf{E}(X, Y, Z) = \int_V d\mathbf{E}(X, Y, Z) = \int_V \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x, y, z) \frac{(X - x)\mathbf{e}_1 + (Y - y)\mathbf{e}_2 + (Z - z)\mathbf{e}_3}{[(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2]^{3/2}} \, dxdydz. \quad (*3)$$

Задача сводится к вычислению трех интегралов – при этом интегрирование в каждом случае нужно вести по объему, где расположены электрические заряды.

В. Законы Ампера и Био-Савара-Лапласа

Сила действующая со стороны магнитного поля на элемент тока описывается законом Ампера

$$d\mathbf{F} = I\ d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \qquad (*4)$$

2. Магнитное поле создается током. Магнитное поле $d\mathbf{B}$, создаваемое током I в элементе проводника $d\mathbf{l}$ описывается законом Био-Савара-Лапласа:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \frac{I\ d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}\ ; \qquad (*5)$$

вектор $d\mathbf{l}$ направлен по току, имеет размерность метра, вектор $\mathbf{r}$ направлен от элемента тока к точке наблюдения поля.

В в законе Био-Савара-Лапласа присутствует фундаментальная величина – магнитная постоянная μ_0, ее можно только измерить.

Что внутри этих законов?

Из закона Био-Савара-Лапласа следует: поле **B**, создаваемое отдельным движущимся зарядом, задается соотношением

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, q\, \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}\ . \qquad (*6)$$

Здесь вектор **r** направлен от точки нахождения движущегося заряда в любую другую точку, где мы наблюдаем магнитное поле.

Из макроскопического закона Ампера следует выражение для силы, действующей со стороны магнитного поля на отдельный движущийся заряд:

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}\ . \qquad (*.7)$$

Таким образом, имеем следующее выражение для силы, действующей со стороны электромагнитного поля $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ на движущуюся заряженную частицу:

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} + q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}\ . \qquad (*.8)$$

1. Уравнение Максвелла I в интегральной форме

Поток напряженности вектора электрического поля $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ через <u>любую замкнутую</u> поверхность S равен суммарному электрическому заряду внутри этой поверхности

$$\oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\, Q \qquad Q = \int_V \rho\, dV + \sum_i q_i\ ; \qquad (1)$$

ϵ_0 – электрическая постоянная, $\rho(x, y, z, t)$ плотность заряда. Когда внутри находятся точечные зарядов, они должны быть учтены дискретным суммированием в правой части уравнения.

В уравнении (1) сформулирован в наиболее общей математической форме экспериментально установленный закон Кулона. Эта форма закона Кулона придумана Гауссом (1777–1855), поэтому она часто называется законом Гаусса.

Доказательство

Пусть в точке $(0,0,0)$ находится покоящийся точечный заряд Q. В силу теоремы Гаусса должно выполняться равенство

$$\oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\, Q\ . \tag{2}$$

Поскольку точечный заряд не имеет внутренней структуры и с ним не связано никакого выделенного направления, то он может создавать векторное поле только со сферической симметрией. Математическое описание такого поля может быть только таким:

$$\mathbf{E} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad \mathbf{r} = (x, y, z)\ , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ . \tag{3}$$

Поверхность выберем в виде сферы произвольного радиуса r с центром в месте расположения заряда, тогда

$$\oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \oint_S f(r)\, \frac{\mathbf{r}}{r}\ \frac{\mathbf{r}}{r}\, dS = f(r) \oint_S dS = f(r)\, 4\pi r^2\ .$$

С учетом чего уравнение (2) дает

$$f(r)\,4\pi\, r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad f(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\ .$$

Подставляя это выражение для $f(r)$ в исходное выражение (1.3) для вектора **E**, получим выражение для вектора электрического поля точечного заряда:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{\mathbf{r}}{r^3}\ . \qquad (4)$$

Это экспериментально установленный закон Кулона.

Обобщение для замкнутой поверхности произвольной формы проводится с использованием понятия телесного угла. Сначала пусть точечный заряд находится внутри любой замкнутой поверхности простой формы. Поток электрического вектора равен ($d\Omega$ – элемент телесного угла) равен интегралу от элемента телесного угла

$$\oint_S \mathbf{EdS} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{dS_E}{r^2} \equiv \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\oint_S d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}4\pi\ . \qquad (5)$$

Если имеем сложную поверхность, т. е. силовые линии электрического вектора могут пересекать ее 1,3, 5, ... раз (для примера пусть будет 3-кратное пересечение; по договоренности вектор $d\mathbf{S}$ направлен наружу от замкнутой поверхности), тогда подынтегральное выражение для одной силовой линии равно

$$\oint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{(1)}^2}dS_E^{(1)} + \frac{1}{r_{(2)}^2}dS_E^{(2)} + \frac{1}{r_{(3)}^2}dS_E^{(3)}\right) =$$

$$= \oint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(d\Omega + d\Omega - d\Omega) = \oint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

т. е геометрическая сложность поверхности не меняет результата.

Если поверхность не содержит заряда внутри себя, то все вклады в поток вдоль одной силовой линии электрического поля всегда компенсируют друг друга, и в результате суммарный поток по замкнутой поверхности обращается в ноль.

2. Уравнение Максвелла I в дифференциальной форме

Воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского: Поток вектора $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ через замкнутую поверхность S равен интегралу от дивергенции этого вектора по объему, заключенному внутри поверхности S:

$$\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_V \mathrm{div}\mathbf{A} dV, \quad \text{где} \ \ \mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \qquad (6)$$

В уравнении Максвелла I преобразуем левую часть:

$$\oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\, dv \implies \oint_V \mathrm{div}\, \mathbf{E}\, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \oint_V \rho\, dv\ . \qquad (7)$$

Поскольку выражения слева и справа должны быть равны при любом выборе объема V , то должны быть равны в каждой точке (t, x, y, z) и две подынтегральные функции

$$\mathrm{div}\, \mathbf{E}(t, x, y, z) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(t, x, y, z))\ . \qquad (8)$$

Это уравнение Максвелла I в дифференциальной форме

3. Уравнение Максвелла III в интегральной и дифференциальной форме

Интегральная форма уравнения Максвелла III в однородной среде

$$\oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0 \ . \tag{9}$$

Дифференциальная форма уравнения Максвелла III в однородной среде

$$\mathrm{div}\, \mathbf{B}(x) = 0 \ . \tag{10}$$

Эти уравнения отражают в себе одно из важнейших свойств электродинамики Максвелла: отсутствие магнитных зарядов и замкнутость магнитных силовых линий.

Для существования магнитного поля достаточно только <u>движения</u> электрических зарядов.

4. Электромагнитная индукция Фарадея

Первый эксперимент Фарадея, в котором было обнаружено возникновение тока в цепи, индуцированного магнитным полем, основывался на следующей схеме:

две катушки провода располагались близко друг от друга; одна катушка была присоединена к гальванометру, другая соединена через выключатель с батареей. Было обнаружено, что если подключать и затем отключать катушку к батарее, то при этом гальванометр в цепи указывает на возникновение противоположно направленных токов.

В более поздних экспериментах Фарадей установил, что простое приближение или удаление проводника с током индуцирует ток в расположенной в этой области пространства цепи. Если приближать или удалять обычный магнит, то результат будет аналогичный.

В 1834 году Ленц выполнил важную серию опытов, которые привели его к знаменитому правилу определения направления индуцированного тока.

5. Электромагнитная индукция, закон Фарадея

Поверхностный интеграл от вектора магнитного поля $\mathbf{B}$ называют магнитным потоком и обозначают символом Φ:

$$d\Phi = \mathbf{BdS} = B\,dS\cos\alpha\,, \quad \Phi(t) = \int_S \mathbf{B}d\mathbf{S}. \qquad (11)$$

Пусть незамкнутая поверхность S опирается на контур L (ориентация поверхности и контура согласованы стандартным образом). Тогда, согласно Фарадею, мгновенное значение индуцированного напряжения в контуре пропорционально скорости изменения магнитного потока через поверхность S

$$U_{ind}(t) = \oint_L \mathbf{E}_{ind}\mathbf{dl} = -\frac{d}{dt}\Phi(t). \qquad (12)$$

Знак минус введет специально для того, чтобы учесть правило Ленца.

6. Уравнение Максвелла II в интегральной форме

Другая математическая формулировка закона Фарадея такая:

Циркуляция напряженности электрического вектора **E** по любому замкнутому контуру L равна минус производной по времени от потока магнитного вектора **B** через любую поверхность S, ограниченную контуром L:

$$\oint_L \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S}\,. \tag{13}$$

Это уравнение Максвелла II в интегральной форме.

Если в пространстве рассматриваете просто абстрактный контур, где нет никакого проводника, то электрическое поле все равно возникает в соответствии с этим уравнением (13).

То есть, уравнение Максвелла II – это нечто большее, чем только экспериментально наблюдаемая электромагнитная индукция.

7. Уравнение Максвелла II в дифференциальной форме

В математике существует, помимо дивергенции, еще одна операция над векторным полем – вычисление ротора векторного поля.

Эта операция определяется следующим образом:

$$(\mathrm{rot}\mathbf{A})_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, (\mathrm{rot}\mathbf{A})_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3, (\mathrm{rot}\mathbf{A})_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1.$$

Сформулируем теорему из соответствующего раздела математики – <u>теорему Стокса-Грина</u>:

циркуляция от вектора через ориентированный контур L равна потоку ротора этого вектора через поверхность, ограниченную ориентированным контуром L (ориентация контура задает и ориентацию поверхности, ограниченной этим контуром):

$$\int_L \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = \int_S \mathrm{rot}\, \mathbf{A}\, d\mathbf{S}\ . \tag{14}$$

Преобразуя левую часть уравнения Максвелла II в интегральной форме по теореме Стокса, получаем

$$\int_L \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} \quad \Longrightarrow \quad \int_S \mathrm{rot}\, \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S}\, .$$

Поскольку равенство верно при любом выборе поверхности S, опирающейся на произвольный конур L, отсюда заключаем, что это возможно только если совпадают подынтегральные функции:

$$II, \quad \mathrm{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, . \tag{15}$$

Это уравнение Максвелла II в дифференциальной форме.

8. Закон Ампера для постоянных магнитных полей

Магнитное поле создается током. Магнитное поле $d\mathbf{B}$, создаваемое током I в элементе проводника $d\mathbf{l}$ описывается законом Био-Савара-Лапласа

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}\, ; \tag{16}$$

После работ Био-Саварпа-Лапласа Ампер опубликовал результаты своих экспериментов в 1826 году. Он записал некое интегральное уравнение, описывающее связь между постоянными магнитными полями и постоянными электрическими токами. В современных обозначениях его уравнение имеет вид

$$\oint_L \mathbf{B}\, \mathbf{dl} = \mu_0\ I\ . \tag{17}$$

Этот закон Ампера говорит, что постоянным токам всегда сопутствуют постоянные магнитные поля и между токами и магнитными полями существует вполне определенная связь:

> магнитное поле всегда имеет такую конфигурацию, что, выделив в пространстве любой замкнутый контур и вычислив величину интеграла от магнитного поля **B** вдоль этого контура, мы получим величину, численно равную суммарному току, пронизывающему этот контур.

]

С учетом того, что этот суммарный ток можно представить как интеграл от плотности тока по поверхности S, ограниченной контуром L

$$I = \int_S \mathbf{J}\, \mathbf{dS} \ , \tag{18}$$

интегральный закон Ампера (17) можно представить как

$$\oint_L \mathbf{B}\, \mathbf{dl} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}\, \mathbf{dS} \ . \tag{19}$$

Здесь по-прежнему работает правило о согласованной ориентации – без него уравнение Ампера является алгебраически неопределенным.

Используя теорему Стокса из уравнения (20) можно вывести дифференциальное уравнение Ампера

$$\int_S \mathrm{rot}\mathbf{B}\, d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}\, d\mathbf{S} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{rot}\, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{20}$$

9. От уравнения Ампера к уравнению Максвелла IV

Эксперименты показывали, что это уравнение Ампера не описывало явлений, происходящих при наличии переменных электрических токов и переменных электрических полей.

Рис. иллюстрирует эксперимент который в принципе позволяет понять логику Максвелла, приведшую его к обобщению уравнения Ампера.

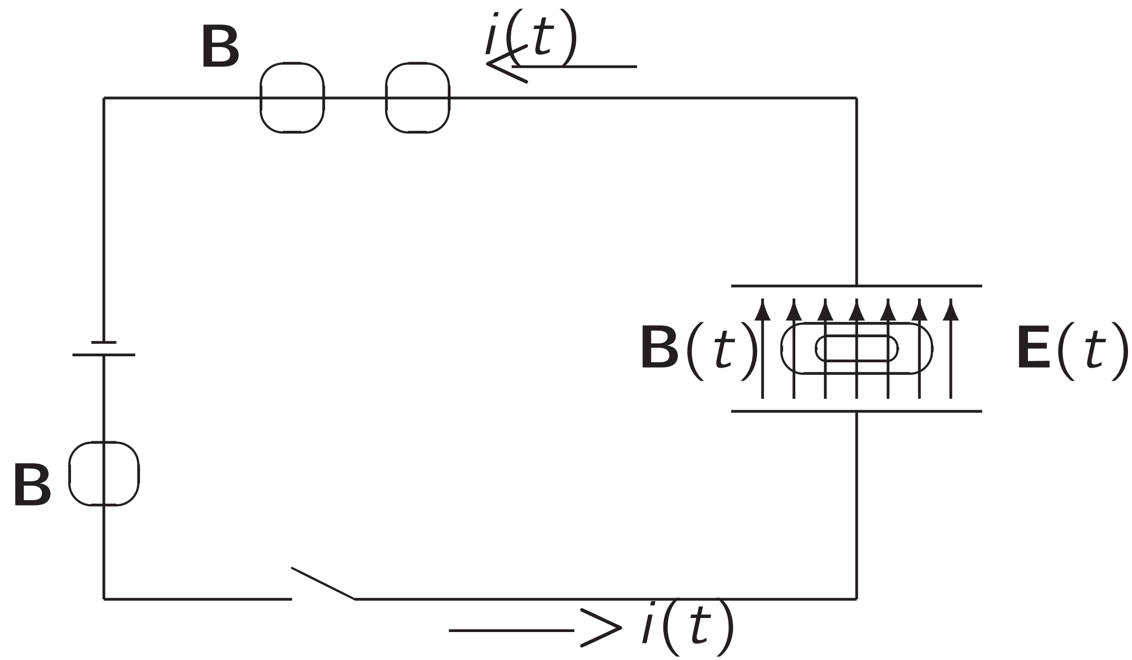

Рис. К обобщению уравнения Ампера

Электрическая цепь включает источник постоянного тока, плоский конденсатор, переключатель – мы имеем возможность замыкать и размыкать электрическую цепь.

Что происходит в зазоре между двумя проводящими пластинами конденсатора в то время, когда ток в электрический цепи меняется (замыкание и размыкание электрической цепи).

В этом зазоре никакого тока – механического перемещения электрического заряда нет. В этой области пространства есть только электрическое поле между обкладками конденсатора, и это электрическое поле меняется при зарядке или разрядке конденсатора.

С точки зрения уравнения Ампера в этой области пространства между пластинами конденсатора ничего не должно происходить – раз нет тока, то нет и магнитного поля.

Но эксперименты сказали – это не так: какое-то магнитное поле там появляется.

Обдумывая результаты проведенных экспериментов, Максвелл предположил, что вокруг этого зазора между пластинами конденсатора – области пространства с меняющимся со временем электрическим полем:

$$E(t), \qquad \frac{\partial E}{\partial t} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B}(t) \neq 0$$

возникает магнитное поле $B(t)$.

Причем возникновение этого магнитного поля связано именно с изменением во времени электрического поля. Максвелл постулировал форму обобщенного уравнения Ампера, учитывающего это новое явление

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{J} + \epsilon_0\mu_0\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{21}$$

Именно внесение нового дополнительного члена в уравнении явилось важнейшим вкладом Максвелла в теорию электромагнитного поля.

10. Уравнение Максвелла IV в дифференциальной и интегральной формах

Уравнение Максвелла IV в дифференциальной форме – это

$$\frac{1}{\mu_0}\,\nabla\times\mathbf{B} = \;\mathbf{J}+\epsilon_0\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\;. \tag{22}$$

Отсюда, для произвольной поверхности S опирающейся на любой замкнутый контур L получаем уравнение в интегральной форме

$$\int_S (\nabla\times\mathbf{B})\,\mathbf{dS} = \mu_0\;\int_S \mathbf{J}\,\mathbf{dS} + \epsilon_0\mu_0\,\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{E}\,\mathbf{dS}\;.$$

Преобразуя левую часть этого уравнения с помощью теоремы Грина-Стокса, приходим к уравнению

$$\frac{1}{\mu_0}\int_L \mathbf{B}\,\mathbf{dl} = \;\int_S \mathbf{J}\,\mathbf{dS} + \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{E}\,\mathbf{dS}\;; \tag{23}$$

это уравнение Максвелла IV в интегральной форме.

11. Уравнения Максвелла, сводка формул
Дифференциальная форма

$$I \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho\,, \qquad IV \qquad \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,, \qquad (24a)$$

$$II \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \qquad III \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0\,. \qquad (24b)$$

В среде уравнения Максвелла должны быть модифицированы введением электрической и магнитной проницаемостей ϵ, μ (для простоты мы рассматриваем однородные среды):

$$I \quad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0\epsilon}\,\rho\,, \quad IV \quad \frac{1}{\mu_0\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{J} + \epsilon_0\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\mathbf{j}\,, \qquad (25a)$$

$$II \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \quad III \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0\,. \qquad (25b)$$

В некотором смысле, уравнения I, II, III, IV – это все, что мы знаем об электромагнитным поле; все электромагнитные явления могут быть объяснены на базе этих уравнений.

Для описания электрического поля мы будем использовать наряду с векторами $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ также и векторы $\mathbf{D}$, .$\mathbf{H}$:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon\ \mathbf{E}\ , \qquad \mathbf{B} = \mu_0 \mu\ \mathbf{H}\ . \tag{26}$$

С использованием 4-х электромагнитных векторов Уравнения Максвелла можно записать так:

$$I, \quad \mathrm{div}\, \mathbf{D} = \ \rho\ , \qquad IV, \quad \mathrm{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\ , \tag{27a}$$

$$II, \quad \mathrm{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\ , \qquad III, \quad \mathrm{div}\, \mathbf{B} = 0\ . \tag{27b}$$

Обратите внимание, что мы разбили уравнения в две группы: разделили уравнения с источниками и без источников.

Чтобы учесть наличие среды, мы должны вводить в уравнения параметры, описывающие свойства среды (в простейшем случае – это диэлектрическая проницаемость ϵ и магнитная проницаемость μ), но можно "спрятать" эти дополнительные параметры – характеристики среды, используя дополнительные векторы $\mathbf{D}, \mathbf{H}$.

6. Возникновение теория относительности ...

1) сначала начали интересоваться вопросом как ведет себя скорость света по отношению к движению наблюдателя, она вела себя более чем странно ...;

2) потом начали интересоваться свойствами симметрии уравнении Максвелла (Лоренц, Пуанкаре и др.): было установлено что уравнения Максвелла инвариантны относительно очень странных преобразований (потом названных Лоренцевскими), но эти преобразования согласовывались со странным поведением скорости света;

3) потом Эйнштейн упростил формальное введение самих преобразований Лоренца (без использования уравнений Максвелла, фактически используя только странное свойство – постоянство скорости света) и углубил физическое понимание этих преобразований;

4) потом Минковский развил подход к уравнениям Максвелла на основе 4-мерных тензоров.

Чтобы пройти путь быстро, мы изменим порядок и начнем сразу с подхода Минковского

7. Тензорный формализм Минковского

Покажем (Минковский, 1909 г.), что пара уравнений Максвелла с источниками

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = J^0\,, \quad \operatorname{rot}\frac{\mathbf{H}}{c} = \frac{\mathbf{J}}{c} + \frac{\partial}{\partial ct}\mathbf{D}\,, \tag{28}$$

может быть записана в очень компактной форме, если ввести специальные обозначения с привлечением индексов:ь

$$x^a = (x^0 = ct;\ x^1, x^2, x^3), \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}\,, \quad j^{\,a} = (J^0, \frac{J^i}{c})\,,$$

$$(H^{ab}) = \left|\begin{array}{cccc} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ +D^1 & 0 & -H^3/c & +H^2/c \\ +D^1 & +H^3/c & 0 & -H^1/c \\ +D^3 & -H^2/c & +H^1/c & 0 \end{array}\right|\,. \tag{29}$$

величину с одним индексом называем 4-вектором или тензором 1-го ранга; величину с двумя 4-мерными индексами называем тензором 2-го ранга; и т. д. В (29) введены 4-вектор x^a и антисимметричный тензор H^{ab}.

Условимся, что расположение индекса – вверху или внизу – является существенным: опускание или поднимание каждого индекса будет осуществляться по правилу

$$A^a \Longrightarrow A_a : \quad A_0 = +A_0, \quad A^i = -A_i, \ (i = 1, 2, 3) \ . \qquad (30)$$

Кроме того условимся, что всегда, когда в уравнении встречаются два одинаковых индекса, расположенные вверху и внизу, то по ним предполагается суммирование, но в самой системе обозначений никакого специального напоминания об этом нет; например,

$$C^a B_a = C^0 B_0 + C^1 B_1 + C^2 B_2 + C^3 B_3 =$$
$$= C^0 B_0 - C^1 B^1 - C^2 B^2 - C^3 B^3 \ . \qquad (31)$$

Трехмерный вектор будем представлять так:

$$\mathbf{C} = (C^1, C^2, C^3) = (-C_1, -C_2, -C_3) \ ,$$

то есть верна запись

$$C^a B_a = C^0 B_0 - \mathbf{C}\ \mathbf{B} \ . \qquad (32)$$

Убедимся, что одно простое соотношение с использованием индексов

$$\partial_b \, H^{ba} = j^a \ . \qquad (33)$$

это не что иное как запись двух уравнений Максвелла (28). Действительно, рассматриваем уравнение (33) при $a = 0$:

$$d\partial_b H^{b0} = j^0 : \quad \Longrightarrow \qquad \partial_1 H^{10} + \partial_2 H^{20} + \partial_3 H^{30} = j^0 \ ,$$

или

$$\partial_1 D^1 + \partial_2 D^2 + \partial_3 D^3 = \rho \ , \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho.$$

Рассматриваем случаи $a = 1, 2, 3$:

$$\partial_b H^{b1} = j^1, \partial_0 H^{01} + \partial_2 H^{21} + \partial_3 H^{31} = j^1, \ \partial_2 H^3 - \partial_3 H^2 = \frac{\partial}{\partial t} D^1 + J^1;$$

$$\partial_b H^{b2} = j^2 :, \partial_0 H^{02} + \partial_1 H^{12} + \partial_3 H^{32} = j^2, \ \partial_3 H^1 - \partial_1 H^3 = \frac{\partial}{\partial t} D^2 + J^2;$$

$$\partial_b H^{b3} = j^3, \partial_0 H^{03} + \partial_1 H^{13} + \partial_2 H^{23} = j^2, \ \partial_1 H^2 - \partial_2 H^1 = \frac{\partial}{\partial t} D^3 + J^3.$$

Обратимся ко второй паре уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} c\mathbf{B} = 0 \,, \qquad\qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial ct}\, c\mathbf{B} \,. \tag{34}$$

Введем тензор еще один второго ранга:

$$(F^{ab}) = \left| \begin{array}{cccc} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ +E^1 & 0 & -cB^3 & +cB^2 \\ +E^1 & +cB^3 & 0 & -cB^1 \\ +E^3 & -cB^2 & +cB^1 & 0 \end{array} \right| \,. \tag{35}$$

Убедимся, что другой формой записи уравнений Максвелла (34) является тензорное уравнение

$$\partial_c \, F_{ab} + \partial_a \, F_{bc} + \partial_b \, F_{ca} = 0 \,. \tag{36}$$

В левой части уравнения стоит 3-индексная величина, антисимметричная по каждой паре ее индексов. Поэтому есть только 4 разных случая:

$$(cab) : \qquad (123), \qquad (012), \qquad (023), \qquad (013) \,.$$

Последовательно получаем уравнения:

$$(123): \quad \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0,$$

$$\underline{-\partial_1 B^1 - \partial_2 B^2 - \partial_3 B^3 = 0};$$

$$\begin{aligned} (012): \quad & \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = 0 \;, \\ & -\partial_0 B^3 - \partial_1 E^2 + \partial_2 E^1 = 0 \;, \\ & \underline{\partial_1 E^2 - \partial_2 E^1 = -\partial_0 B^3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (023): \quad & \partial_0 F_{23} + \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} = 0 \;, \\ & -\partial_0 B^1 - \partial_2 E^3 + \partial_3 E^2 = 0 \;, \\ & \underline{\partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 = -\partial_0 B^1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (013): \quad & \partial_0 F_{13} + \partial_1 F_{30} + \partial_3 F_{01} = 0 \;, \\ & -\partial_0 B^2 - \partial_1 E^3 + \partial_3 E^1 = 0 \;, \\ & \underline{\partial_3 E^1 - \partial_1 E^3 = -\partial_0 B^3}. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения Максвелла представимы так:

$$\partial_b \; H^{ba} = j^a \;, \quad \partial_c \; F_{ab} + \partial_a \; F_{bc} + \partial_b \; F_{ca} = 0 \;, \qquad (37)$$

7. Преобразования Лоренца для электромагнитного поля

Важное свойство введенной системы обозначений заключается в том, что она автоматически учитывает симметрию системы уравнений Максвелла относительно странных преобразований Лоренца. Хотя путь к этим преобразованиям начинался с 3-мерной векторной формы и был не простым. Это было фактически введение аппарата после готового решения задачи об установлении симметрии.

Стало легко задавать правильные и возможные с релятивистской точки зрения формулы преобразований Лоренца для тех или иных физических величин.

Рецепт такой: чтобы получать такие формулы в явном виде, нужно знать только одно – каким тензором описывается та или иная физическая величина.

Разъясним это на примерах.

Все физические величины с одним 4-мерным индексом меняются при лоренцевских преобразованиях в плоскости $(ct, x) = (x^0, x^1)$) в точности так же как координатный 4-вектор x^a:

$$x^{'0} = \mathrm{ch}\beta x^{\,0} - \mathrm{sh}\beta x^1, x^{'1} = -\mathrm{sh}\beta x^{\,0} + \mathrm{ch}\beta x^1, \qquad (38a)$$

$$x^{'2} = x^2, x^{'3} = x^3; \quad \mathrm{ch}\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \ \ \mathrm{sh}\beta = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \ ;$$

любой другой тензор 1-го ранга A^a преобразуется по тем же формулам Лоренца (термин тензор 1-го ранга – это указание на определенные свойства этой величины относительно преобразований Лоренца):

$$A^{'0} = \mathrm{ch}\beta A^{\,0} - \mathrm{sh}\beta A^1, A^{'1} = -\mathrm{sh}\beta A^{\,0} + \mathrm{ch}\beta A^1, \qquad (38b)$$

$$A^{'2} = A^2, A^{'3} = A^3.$$

Все преобразования Лоренца оставляют неизменным выражение (так называемый релятивистский интервал)

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^2)^2 = (x^{'0})^2 - (x^{'1})^2 - (x^{'2})^2 - (x^{'2})^2. \quad (38c)$$

Здесь существует 6-параметрическое множество преобразований (3 типа евклидовых преобразований и 3 типа псевдоевклидовых), оно образует так называемую группу Лоренца.

При работе с этими преобразованиями едобно использовать матричную запись. Например,

$$A^{'a} = L^{'a}{}_{b}(\beta)\; A^{b}, \quad \begin{vmatrix} A^{'0} \\ A^{'1} \\ A^{'2} \\ A^{'3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{ch}\beta & -\mathrm{sh}\beta & 0 & 0 \\ -\mathrm{sh}\beta & \mathrm{ch}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} A^{0} \\ A^{1} \\ A^{2} \\ A^{3} \end{vmatrix} . \tag{38}$$

Любой тензор 2-го ранга – это физическая величина с двумя индексами, преобразующая по следующим формулам :

$$K^{'ab} = L^{a}{}_{m} L^{b}{}_{n}\; K^{mn} \; . \tag{39}$$

Аналогичное определение принимается и для тензоров более высокого ранга. Например, правило преобразования для тензоров 3-го ранга имеет вид

$$K^{'abc} = L^{a}{}_{m} L^{b}{}_{n} L^{c}{}_{k}\; K^{mnk} \; . \tag{40}$$

Получим формулы для преобразования компонент антисимметричного тензора второго ранга. Для простоты следим за преобразованием в плоскости 01.

Для определенности будем иметь в виду тензор электромагнитного поля F^{ab}, у которого в соответствии со свойством антисимметричности есть только шесть независимых компонент:

$$(F^{ab}) = \left| \begin{array}{cccc} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ +E^1 & 0 & -cB^3 & +cB^2 \\ +E^1 & +cB^3 & 0 & -cB^1 \\ +E^3 & -cB^2 & +cB^1 & 0 \end{array} \right| . \qquad (41)$$

Последовательно получаем:

$$F^{0'1'} = L^0{}_a L^1{}_b F^{ab} = (\mathrm{ch}^2\beta - \mathrm{sh}^2\beta)\; F^{01} = +F^{01} \;,$$

$$F^{0'2'} = L^0{}_a L^2{}_b F^{ab} = \mathrm{ch}\beta\; F^{02} - \mathrm{sh}\beta\; F^{12} \;,$$

$$F^{0'3'} = L^0{}_a L^3{}_b F^{ab} = \mathrm{ch}\beta\; F^{03} - \mathrm{sh}\,\beta F^{13} \;,$$

$$F^{'23} = L^2{}_a L^3{}_b\; F^{ab} = +F^{23} \;,$$

$$F'^{31} = L^3{}_a L^1{}_b \, F^{ab} = \text{ch}\,\beta F^{31} - \text{sh}\,\beta F^(30) \ ,$$
$$F'^{12} = L^1{}_a L^2{}_b F^{ab} = -\text{sh}\,\beta F^{02} + \text{ch}\,\beta F^{12} \ .$$

Эти три формулы можно записать с использованием обозначений $(F^{ab} = E^i, cB^i)$ таким образом:

$$E^{1'} = +E^1, \quad E^{2'} = \text{ch}\beta E^2 - \text{sh}\beta c B^3, \quad E^{3'} = \text{ch}\beta E^3 + \text{sh}\beta c B^2 \ ,$$

$$B'^1 = +B^1, \quad cB'^3 = -\text{sh}\beta E^2 + \text{ch}\beta c B^3, \quad cB'^2 = \text{sh}\beta E^3 + \text{ch}\beta c B^2,$$

Точно такие же формулы могут быть получены из тензорной структуры величины $H^{ab} = (D^i, H^i/c)$:

$$D^{1'} = +D^1, D^{2'} = \text{ch}\beta D^2 - \text{sh}\beta \frac{H^3}{c}, D^{3'} = \text{ch}\beta D^3 + \text{sh}\beta \frac{H^2}{c},$$

$$H'^1 = +H^1, \quad \frac{H'^3}{c} = -\text{sh}\beta D^2 + \text{ch}\beta \frac{H^3}{c}, \quad \frac{H'^2}{c} = \text{sh}\beta D^3 + \text{ch}\beta \frac{H^2}{c} \ ,$$

Формулы интересны, например, тем, что чисто электрическое поле после преобразования Лоренца становится электрическим и магнитным, а только магнитное поле становится магнитным и электрическим

При малых скоростях $\mathrm{ch}\,\beta = 1, \mathrm{sh}\,\beta = V/c$ из

$$ct' = \mathrm{ch}\beta\ ct - \mathrm{sh}\beta\ x\ , \quad x' = -\mathrm{sh}\beta\ ct + \mathrm{ch}\beta\ x\ , \tag{42}$$

переходят в преобразования Галилея:

$$t' = t, \qquad x' = x - Vt\ , \tag{43}$$

Преобразование электромагнитного поля также упрощается:

$$\begin{gathered} E^{1'} = +E^1, \quad E^{2'} = E^2 - VB^3, \quad E^{3'} = E^3 + VB^2\ , \\ B'^1 = +B^1, \quad B'^3 = -\tfrac{V}{c^2}E^2 + B^3, \quad B'^2 = \tfrac{V}{c^2}E^3 + B^2, \\ D^{1'} = +D^1, D^{2'} = D^2 - \tfrac{V}{c^2}H^3, D^{3'} = D^3 + \tfrac{V}{c^2}H^2, \\ H'^1 = +H^1, \quad H'^3 = -VD^2 + H^3, \quad H'^2 = VD^3 + H^2\ , \end{gathered} \tag{44}$$

Однако уравнения Максвелла не инвариантны относительно этого преобразования (43)–(44), если только не отбрасывать руками малые слагаемые. В самом начало было затрачено много усилий (в частности, Лоренцем), чтобы описать свойства симметрии уравнений Максвелла приближенно. Потом Пуанкаре нашел точные симметрии, но с использованием странных преобразований (названных лоренцевскими).

Часть 2. Основы специальной теории относительности, механика

1 Преобразования Галилея, закон сложения скоростей

Система отсчета

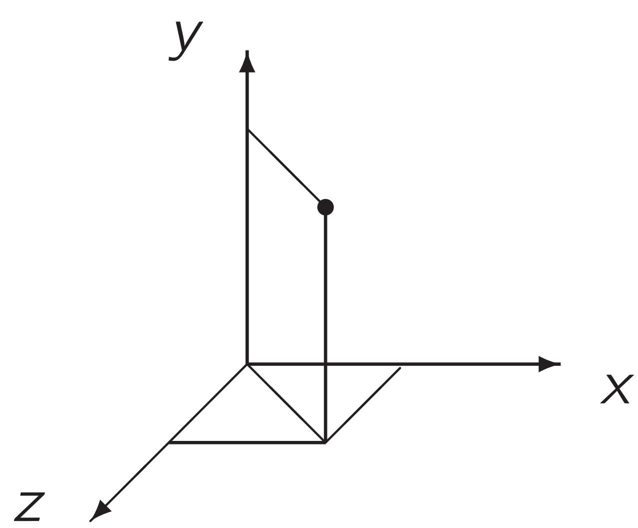

Рис. 12.1 Система отсчета

Понятие системы отсчета необходимо, если мы хотим говорить об описании физических явлений.

Например, рассмотрим скорость в механике. Когда говорим, что машина движется со скоростью 60 км/час, мы имеем в виду, что она движется относительно дороги. Здесь дорога – часть неподвижной системы отсчета, а машина меняет свое положение относительно этой системы отсчета.

Но мы имеем право связать движущуюся систему отсчета с самой машиной, тогда скорость машины становится равной нулю, а относительно машины движется дорога (можно выбрать какую-либо точку на дороге: например, столб).

Таким образом, скорость – это относительная величина, она зависит от выбора неподвижной системы отсчета.

Сложение скоростей. Предположим, что судно движется вниз по течению, скорость которого 3 км/час.

Также предположим, что скорость судна в неподвижной воде - 8 км/час.

Капитан считает, что относительно воды скорость судна равна 8 км/час, а берега отдаляются от судна со скоростью 11 км/час.

Наблюдатель на берегу видит, что судно движется со скоростью 11 км/час относительно неподвижной системы координат, в которой находится наблюдатель.

Это типичный пример закона сложения скоростей по Галилею

$$W' = W - V \,. \tag{1.1}$$

Инерциальные системы отсчета – это те системы, в которой применимы законы механики Ньютона. В предыдущем примере имелось три инерциальных системы отсчета: связанные соответственно с берегом, с равномерно бегущей водой, и равномерно плывущей относительно воды лодкой.

Если не учитывать вращения Земли вокруг собственной оси, то в любой точке поверхности Земли мы имеем инерциальную систему отсчета.

Нарушение инерциальности системы отсчета на поверхности Земли происходит также и из-за вращения Земли вокруг Солнца, но это нарушение много меньше вызываемого собственным вращением Земли.

Отклонение инерциальности системы отсчета из-за неравномерного (с ускорением) движения самого Солнца еще меньше. Таким образом, инерциальная система отсчета – это идеализация, но большая часть механики Ньютона работает именно для таких инерциальных систем.

Тут нет противоречия, так как нужно помнить, что все экспериментальные измерения проводятся с некоторой ограниченной точностью, и если нарушения инерциальности лежат ниже порога точности измерений, то законы механики для инерциальных систем отсчета должны подтверждаться экспериментально.

Если мы повышаем точность и обнаруживаем, что наблюдаемые механические закономерности на поверхности Земли немного отличаются от тех, которые предсказываются законами механики Ньютона, то достаточно перейти к системе отсчета, являющейся инерциальными в более точном смысле, и т. д.

Принцип относительности в механике.

Этот принцип для механических явлений впервые сформулировал Галилей. В книге "Диалог о двух главнейших системах мира птолемеевой и аристотелевой" (1632 год) Галилей так описывает невозможность обнаружить равномерное и прямолинейное движение инерциальной системы отсчета относительности другой инерциальной системы отсчета:

Уединитесь с кем-либо из друзей в просторное помещение под палубой какого-нибудь корабля, запаситесь мухами, бабочками и другими подобными мелкими летающими насекомыми; пусть будет у вас там также большой сосуд с водой и плавающими в нем маленькими рыбками; подвесьте, далее, наверху. ведерко, из которого вода будет падать капля за каплей в другой сосуд с узким горлышком, подставленным внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте прилежно, как мелкие летающие животные с одной и той же скоростью движутся во все разные стороны помещения; рыбы, как вы увидите, будут плавать безразлично во всех направлениях, все падающие капли попадут в подставленный сосуд, и вам, бросая какой-нибудь предмет, не придется бросать его с большей силой в одну сторону, чем в другую, если расстояния будут одни и те же; и если вы будете прыгать сразу двумя ногами, то сделаете прыжок на одинаковое расстояние в любом направлении. Прилежно наблюдайте все это, хотя у нас не возникает никакого сомнения в том, что пока корабль стоит неподвижно, все должно происходить именно так. Заставьте теперь корабль двигаться с любой скоростью, и тогда (если только движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону) во всех названных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни одному из них не сможете установить, движется ли корабль или стоит неподвижно.

Это очень образное описание простого и сухого утверждения: законы механики одинаковы (одни и те же) для всех инерциальных систем отсчета. Экспериментальным фактом является то, что если одна система отсчета – условно назовем ее исходной (неподвижной) системой K – инерциальна, то и любая другая система отсчета K', которая движется относительно исходной системы K с любой постоянной скоростью V, также является инерциальной. То есть законы механики будут применимы в неизменном виде и в системе K' тоже.

Если покажется, что приведенные утверждения само собой понятны со всеми своими следствиями, то это неверное восприятие принципа относительности Галилея в механике. В разъяснение этого приведем один пример.

Представим в вагоне равномерно двигающегося поезда пассажира (инерциальная система отсчета K), подбрасывающего мяч и ловящего его. Пассажир, как наблюдатель в своей неподвижной системе координат, видит мяч, летящий прямолинейно вверх а затем вниз. Пассажир знает силу, действующую на мяч и он, используя законы Ньютона, подсчитывает максимальную высоту подъема мяча и время, которое мяч проводит в воздухе.

Пусть на обочине пути находится другой (инерциальны) наблюдатель. Ему даны сила, действующая на мяч и скорость поезда. Используя те же самые законы Ньютона, но записанные им для своей системы отсчета K', он получает ту же максимальную высоту подъема и то же самое время нахождения в воздухе. Выводы обоих наблюдателей касательно движения мяча верны. Законы Ньютона применимы в равной степени в обоим системам отсчета, среди этих систем отсчета нет лучшей, или худшей в этом смысле.

Выпишем их в явном виде для данной ситуации (пусть y вертикальная, а движение поезда происходит вдоль горизонтальной оси x):

$$K, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0\,, \quad K'\,, \quad \frac{d^2x'}{dt'^2} = 0\,,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\,, \qquad \frac{d^2y'}{dt'^2} = -g\,. \tag{1.2.}$$

Уравнения механики имеют один и тот же вид в двух различающихся инерциальных системах K и K', различие есть только в начальных условиях двух задач.

В системе K имеем

$$x|_{t=0} = 0\,, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0\,; \qquad y|_{t=0} = 0\,, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \dot{y}_0\,.$$

В системе K' имеем

$$x'|_{t'=0} = 0\,, \quad \left.\frac{dx'}{dt'}\right|_{t=0} = -V\,; \qquad y'_{t'=0} = 0\,, \quad \left.\frac{dy'}{dt'}\right|_{t'=0} = \dot{y}_0\,.$$

Решения одних и тех же уравнений в системах K и K' с разными начальными условиями будут выглядеть конечно по-разному:

$$K, \qquad x(t) = 0\,, \quad y(t) = \dot{y}_0\, t - g\,\frac{t^2}{2}\,;$$

$$K'\,, \qquad x(t) = -V t'\,, \quad y'(t') = \dot{y}_0\, t' - g\,\frac{t'^2}{2}\,.$$

Причем два полученных решения связаны преобразованием Галилея

$$x' = x - V t\,, \quad y' = y\,, \quad t' = t\,. \tag{1.3}$$

Конечно, в отличие от наблюдателя внутри вагона, наблюдатель на обочине дороги получает параболическую траекторию движения мяча. Но вид траектории движения – это не инвариантная характеристика системы. Инвариантным является только вид уравнений механики Ньютона для разных инерциальных наблюдателей.

Описанная связь между двумя анализами одной и той же физической системы с точки зрения двух разных инерциальных наблюдателей – это и есть содержание принципа относительности в механике для данной физической ситуации.

Принцип относительности – это неотъемлимое свойство всей механики Ньютона, многократно подтвержденное экспериментально.

Это свойство жестко связано с явным видом уравнений механики Ньютона и видом преобразований Галилея, связывающих координаты различных инерциальных систем отсчета.

Легко убедиться в формальной математической инвариантности основного уравнения механики относительно преобразования Галилея.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\,, \tag{1.4}$$

$$x' = x - Vt\,, \quad t' = t\,, \quad F'(x') = F(x)\,, \quad m' = m\,. \tag{1.5}$$

Обратите внимание на простое правило преобразования силы как скаляра. Действительно, поскольку

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x' + Vt)}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{dx'}{dt} + V) = \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2}\,.$$

С учетом чего уравнения (1.4) эквивалентно следующему уравнению в штрихованной системе отсчета

$$m'\frac{d^2x'}{dt'^2} = F'\,. \tag{1.6}$$

2 Независимость скорости света от скорости движения наблюдателя

Ввиду того, что выполнимость принципа относительности Галилея предъявляет некий набор требований к физическому уравнению, то попытка распространение принципа относительности Галилея на уравнения Максвелла – это естественный шаг.

При всей своей простое, принцип относительности Галилея содержит в себе очень жесткие требования к структуре уравнений. Было полной неожиданностью то, что преобразования Галилея совершенно не стыковались с уравнениями электродинамики Максвелла, эти уравнения оказались вовсе не симметричными относительно преобразований Галилея.

> Преобразования Лоренца исторически возникли из анализа свойств симметрии уравнений Максвелла относительно движения системы отсчета наблюдателя – в вакууме эти уравнения оказывались инвариантными относительно специальных преобразований над электромагнитными векторами **E** и **B**, одновременно сопровождаемых некоторыми линейными преобразованиями координат и времени – преобразований Лоренца.

Фактически первым такие преобразования симметрии начал искать Лоренц, но ему удалось найти только их приближенный вид. Эти приближенные формулы уже обладали совершенно непонятными свойствами, которые трудно было интерпретировать физически.

Математически точную форму этих преобразований симметрии (впоследствии они были названы преобразованиями Лоренца) нашел Пуанкаре, и затем Эйнштейн.

Первым на путь выяснения физического смысла преобразований Лоренца через необходимость специального анализа понятия одновременности событий с использованием обмена световыми сигналами встал Пуанкаре.

До логического завершения анализ вопроса довел Эйнштейн. Впрочем исследования в этом направлении продолжаются и по настоящее время.

Всмотримся в преобразование Лоренца еще раз

Пусть система отсчета K' движется относительно (условно неподвижной) системы K со скоростью V в положительном направлении оси x – такое расположение систем отсчета называют стандартным:

$$ct = x_0\,,\ x = x_1\,, \qquad \left|\begin{array}{c} x_0' \\ x_1' \end{array}\right| = \left|\begin{array}{rr} \operatorname{ch}\beta & -\operatorname{sh}\beta \\ -\operatorname{sh}\beta & \operatorname{ch}\beta \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \end{array}\right|, \quad (2.1)$$

или

$$x_0' = \operatorname{ch}\beta\, x_0 - \operatorname{sh}\beta\, x_1\,, \quad x_1' = -\operatorname{sh}\beta\, x_0 + \operatorname{ch}\beta\, x_1\,. \qquad (2.2)$$

Переход к обычной (несимметричной) записи преобразования Лоренца легко может быть осуществлен, если учесть

$$\operatorname{sh}\beta = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad \operatorname{ch}\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,;$$

при этом получаем преобразования Лоренца в виде

$$t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,. \tag{2.3}$$

При скоростях относительного движения много меньших скорости света, $V << c$, из формул (2.4) следуют формулы для преобразования Галилея:

$$t' = t\,, \quad x' = x - Vt\,. \tag{2.4}$$

Штрихованная система координат (t', x') движется относительно нештрихованной (t, x) со скоростью v вдоль оси x.

Обратное к (2.4) преобразование имеет вид

$$t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \tag{2.5}$$

Убедимся, что преобразования Лоренца обладают замечательным свойством симметрии: они не меняют так называемую релятивистскую длину s двумерного пространственно-временного вектора[1]

$$(x_0, x_1)\,, \quad s^2(x_0, x_1) \equiv x_0^2 - x_1^2\,. \tag{2.6a}$$

Докажем это свойство преобразований Лоренца:

$$s^2(x_0', x_1') = s^2(x_0, x_1)\,. \tag{2.6b}$$

[1] Очень часто эту релятивистскую длину пространственно-временного вектора называют интервалом; считается, что термин интервал не приводит к путанице, возможной при использовании термина длина.

Воспользовавшись формулами (2.2), найдем (перекрестные члены сокращаются, и нужно вспомнить основное алгебраическое тождество для гиперболических синуса и косинуса)

$$x_0'^2 - x_1'^2 =$$

$$= (\operatorname{ch}\beta\, x_0 - \operatorname{sh}\beta\, x_1)^2 - (-\operatorname{sh}\beta\, x_0 + \operatorname{ch}\beta\, x_1)^2 =$$
$$= (\operatorname{ch}^2\beta - \operatorname{sh}^2\beta) x_0^2 + (-\operatorname{sh}^2\beta + \operatorname{ch}^2\beta) x_1^2 = x_0^2 - x_1^2\,,$$

т. е. выполняется равенство

$$s^2(x_0', x_1') = s^2(x_0, x_1)\,.$$

Полезно понять геометрическую аналогию, существующую между преобразованиями Лоренца и вращениями в обычной (евклидовой) плоскости. Рассмотрим плоскость (x_1, x_2),

$$\left| \begin{array}{c} x_1' \\ x_2' \end{array} \right| = \left| \begin{array}{rr} \cos\phi & -\sin\phi \\ +\sin\phi & \cos\phi \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right|, \qquad (2.7a)$$

или

$$x_1' = \cos\phi x_1 - \sin\phi x_2\,, \qquad x_2' = -\sin\phi x_1 + \cos\phi x_2\,. \qquad (2.7b)$$

Убедимся, что эти вращения обладают замечательным свойством симметрии: они не меняют длины 2-мерного вектора l^2:

$$(x_1, x_2)\,, \qquad l^2(x_1, x_2) \equiv x_1^2 + x_2^2\,. \qquad (2.7c)$$

Докажем это свойство преобразований вращений

$$l^2(x_1', x_2') = l^2(x_1, x_2)\,.$$

Вычисляем

$$l^2(x_1', x_2') = x_1'^2 + x_2'^2 =$$

$$= (\cos\phi x_1 - \sin\phi x_2)^2 + (\sin\phi x_1 + \cos\phi x_2)^2 =$$

$$= (\cos^2\phi + \sin^2\phi) x_1^2 + (\sin^2\phi + \cos^2\phi) x_2^2 =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 \equiv l^2(x_1, x_2)\,.$$

В связи с имеющейся математической аналогией между вращениями евклидовой плоскости и преобразованиями Лоренца (записанными с помощью гиперболических функций) очень часто говорят: преобразования Лоренца — это вращения в псевдоевклидовой плоскости (эти вращения не меняют псевдоевклидову длину вектора).

Это широко и повсеместно используемая терминология, и если вы намереваетесь иногда заглядывать в книги по физике, то нужно быть с ней знакомым.

Свойство преобразования Лоренца оставлять инвариантный интервал, позволяет очень просто показать, что преобразования Лоренца подобраны так, чтобы скорость света, измеренная двумя наблюдателями, двигающимися относительно друг друга со скоростью v, была одной и той же.

Фактически, вся теория относительности создана такой, что согласовать существование уравнений света и необычное поведение света относительно движения наблюдателей с логикой физического мышления. В частности при этом пришлось уточнять форму основного уравнения механики.

Действительно, пусть в момент времени $t = 0$, когда начала двух систем отсчета совпадали

$$(t', x') = (t, x) = (0, 0)$$

испущен импульс света в положительном направлении осей x и x'. Каждый из наблюдателей,наблюдая за этим светом (его передним фронтом) напишет по своему уравнению

$$x = ct\,, \quad x' = c't' \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{x}{t}\,, \quad c' = \frac{x'}{t'}\,. \tag{2.8}$$

Но два набора координат связаны преобразованием Лоренца, оставляющим инвариантным интервал; следовательно, выполняется равенство

$$c^2t^2 - x^2 = 0\,, \quad c^2t^{'2} - x^{'2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x'}{t'} = \frac{x}{t} = c\,. \tag{2.9}$$

ЗАДАЧА

Записать преобразования Лоренца в плоскостях (x_0, x_2) и (x_0, x_3). Ответ такой:

$$x_0' = \mathrm{ch}\,\beta x_0 - \mathrm{sh}\,\beta x_2\,, \quad x_2' = -\mathrm{sh}\,\beta x_0 + \mathrm{ch}\,\beta x_2\,; \tag{2.10}$$

$$x_0' = \mathrm{ch}\,\beta x_0 - \mathrm{sh}\,\beta x_3\,, \quad x_3' = -\mathrm{sh}\,\beta x_0 + \mathrm{ch}\,\beta x_3\,. \tag{2.11}$$

Часто оказывается удобным записывать преобразования Лоренца в матричной форме как преобразования в 4-мерном пространстве-времени:

$$L(01)\,, \quad \begin{vmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{ch}\,\beta & -\mathrm{sh}\,\beta & 0 & 0 \\ -\mathrm{sh}\,\beta & \mathrm{ch}\,\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\,,$$

$$L(02)\,, \quad \begin{vmatrix} x_0' \\ x_1 \\ x_2' \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{ch}\,\beta & 0 & -\mathrm{sh}\,\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sh}\,\beta & 0 & \mathrm{ch}\,\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\,,$$

$$L(03)\,, \qquad \begin{vmatrix} x_0' \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\beta & 0 & 0 & -\operatorname{sh}\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sh}\beta & 0 & 0 & \operatorname{ch}\beta \end{vmatrix};$$

соответственно евклидовые вращения трех типов обозначаются как

$$L(23)\,, \quad L(31)\,, \quad L(12)\,.$$

Комбинируя друг с другом всевозможные преобразования $L(ij)$ шести указанных типов, получаем множество преобразований, образующих 6-параметрическую группу Лоренца:

$$L'L = L''\,, \quad L, L', L'' \in \{\,\text{множеству пробраз-й Лоренца}\,\}\,.$$

Основные свойства операции умножения в группе такие:

произведение любых элементов группы дает также элемент этой группы; существует единичный элемент, и для любого преобразования есть обратное преобразование: $LL^{-1} = L^{-1}L = I$.

3 Релятивистский закон сложения скоростей

ЗАДАЧА.

Пусть тело двигается со скоростью v' вдоль оси x' в системе K', какова будет скорость этого тела в системе отсчета K?

Выбираем два события на траектории движения частицы в системе K':

$$(t'_{(1)}, x'_{(1)}) , \quad (t'_{(2)}, x'_{(2)}) , \quad v' = \frac{x'_{(2)} - x'_{(1)}}{t'_{(2)} - t'_{(1)}} . \tag{3.1}$$

В системе K эти два события на траектории частицы описываются координатами (используем преобразование Лоренца)

$$t_{(1)} = \frac{t'_{(1)} + (V/c^2)x'_{(1)}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} , \quad x_{(1)} = \frac{x'_{(1)} + V t'_{(1)}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} ,$$

$$t_{(2)} = \frac{t'_{(2)} + (V/c^2)x'_{(2)}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad x_{(2)} = \frac{x'_{(2)} + V t'_{(2)}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,. \tag{3.2}$$

Из уравнений второй строки вычитаем уравнения первой строки:

$$t_{(2)} - t_{(1)} = \frac{(t'_{(2)} - t'_{(1)}) + (V/c^2)(x'_{(2)} - x'_{(1)})}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,,$$

$$x_{(2)} - x_{(1)} = \frac{(x'_{(2)} - x'_{(1)}) + V(t'_{(2)} - t'_{(1)})}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,.$$

Теперь разделим второе уравнение на первое:

$$\frac{x_{(2)} - x_{(1)}}{t_{(2)} - t_{(1)}} = \frac{(x'_{(2)} - x'_{(1)}) + V(t'_{(2)} - t'_{(1)})}{(t'_{(2)} - t'_{(1)}) + (V/c^2)(x'_{(2)} - x'_{(1)})}\,,$$

отсюда следует правило для вычисления скорости частицы в системе отсчета K:

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}\,. \tag{3.3}$$

Это релятивистский закон сложения скоростей.

Обратное преобразование имеет вид

$$v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2}\,. \tag{3.4}$$

ЗАДАЧА

Показать, что релятивистский закон сложения скоростей согласуется с независимостью скорости света от состояния движения наблюдателя.

Пусть $v' = c$, вычислим скорость v:

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2} = \frac{c + V}{1 + cV/c^2} = \frac{c(c + V)}{(c + V)} = c\,. \tag{3.5}$$

Таким образом, релятивистское правило сложения скоростей согласуется с свойством скорости распространения электромагнитных волн: эта скоростей одна и та же для всех инерциальных систем отсчета. Вопрос – в какой инерциальной системе отсчета следует записывать уравнения Максвелла – получил тривиальный ответ. Во всех инерциальных системах отсчета уравнения Максвелла имеют один и тот же неизменный вид.

Отрицательный результат экспериментов Майкельсона и Морли по поиску движения Земли относительно неподвижного мирового эфира получил теоретическое обоснование в установленной более точной форме преобразований координат для двух движущихся инерциальных систем отсчета. Найдено и преобразования координат, следствием которых является независимость скорости света относительно движения системы отсчета наблюдателя.

Это может и не объяснение ... , но очень простое (и экономное в средствах) описание.

4 Относительность понятия – длина

Пусть в системе K' есть неподвижный стержень, его длина (в произвольный фиксированный момент времени t') описывается двумя событиями:

$$(t', x_1')\,, \quad (t', x_2')\,, \quad x_2' > x_1'\,. \tag{4.1}$$

Эти два события можно сопроводить двумя краткими вспышками света, наблюдение этих двух вспышек даст координаты событий в системе K (пользуемся преобразованиями Лоренца)

$$x_1 = \frac{x_1' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},\; t_1 = \frac{t' + Vx_1'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$x_2 = \frac{x_2' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,,\; t_2 = \frac{t' + Vx_2'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \tag{4.2}$$

Вычтем из 3-го уравнения 1-ое:

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \ ; \tag{4.3}$$

это соотношение можно переписать так

$$l_{\text{движ.}} = \frac{l'_{\text{пок.}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \ . \tag{4.4a}$$

Например,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = 100 \ , \qquad V = c\sqrt{1 - \frac{1}{10000}} \ , \qquad l = 100 \ l' \ .$$

Его можно описать словами так: понятие длины стержня относительно – оно зависит от выбора системы отсчета, в которой вы измеряете эту длину.

Понятие длины покоящегося стержня и движущегося стержня основано на определениях, в эти определения вовлечены преобразования Лоренца (т.е. свет с необычными свойством). Поэтому – не понимаю почему – незаконно.

Неподвижный в движущейся системе K' стержень длины $l' = 1$ метр будет казаться имеющим длину $l = 100$ метров в неподвижной системе K.

Но, взяв неподвижный в системе K стержень длины lи наблюдая его с точки зрения системы K', вы получите его длину равной

$$l'_{\text{движ.}} = \frac{l_{\text{пок.}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,. \qquad (4.4b)$$

Между формулами (4.4a)-(4.4b) нет противоречия, так как эти формулы не задают истинную длину, они задают только правило преобразования длины стержня при переходе к движущейся системе отсчета. Вопрос – что такое истинная длина – смысла не имеет.

Только правило преобразования и является здесь физическим содержательным утверждением. Понятия – истинная длина просто не существует. Но существует понятие длины покоящегося стержня и понятие длины движущегося стержня. Эти понятия связываются описанной здесь процедурой.

Длина – это не абсолютное априорное понятие. В принципе можно ввести и другое определение для длины движущегося стержня. Но разные определения не обязаны приводить к одним и тем же ответам.

Понятия длин зависят от выбора системы отсчета, они относительны; и они имеют свои определения. Спросите себя – стоит ли удивляться свойствам длин, которые вводятся определениями. НЕТ. В определенном смысле, в этой части физика добавляет не знаний, она добавляет определений.

Многие безуспешные попытки понять теорию относительности обречены на неудачу, поскольку являются попытками проверить определения, но проверить определения невозможно, их можно только усвоить (или предложить свои, убедив других, что они лучше).

Очень часто это свойство теории относительности упорно не хотят признавать, и везде ищут знаний, игнорируя тот факт, что во всех разделах физики невозможно обойтись без базовых определений и договоренностей. И к таковым относится понятие длины.

5 Относительность понятия – промежуток времени

Пусть в системе K' есть неподвижные часы, отмеренный этими часами промежуток времени описывается двумя событиями:

$$(t_1', x')\,, \quad (t_2', x')\,, \quad t_2' > t_1'\,. \tag{5.1}$$

Эти два события можно сопроводить двумя краткими вспышками света, наблюдение этих двух вспышек даст координаты событий в системе K (пользуемся преобразованиями Лоренца)

$$x_1 = \frac{x' + V t_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad t_1 = \frac{t_1' + V x'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,,$$

$$x_2 = \frac{x + V t_2'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad t_2 = \frac{t_2' + V x'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,. \tag{5.2}$$

Вычтем из 4-го уравнения 2-ое:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,; \tag{5.3}$$

это соотношение можно переписать так:

$$t_{\text{движ.}} = \frac{t'_{\text{пок.}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,. \tag{5.4}$$

Его можно описать словами так: понятие промежутка времени относительно – оно зависит от выбора системы отсчета, в которой вы измеряете этот промежуток времени. Неподвижные в движущейся системе K' часы показывают время $t' = 1$ сек с точки зрения системы отсчета K этот промежуток времени будет казаться имеющим величину $t = 100$ сек , если

$$V = c\,\sqrt{1 - \frac{1}{10000}}$$

Но следует помнить об относительности понятия движение. Поэтому, взяв неподвижные в системе K часы и наблюдая отмеряемые ими промежутки времени его с точки зрения системы K', вы получите для них выражения

$$t'_{\text{движ.}} = \frac{t_{\text{пок.}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \,. \tag{5.5}$$

И между формулами (5.4a) (5.4b) нет противоречия, так как эти формулы не задают истинные промежутки времени, они задают только правило преобразования промежутков времени при переходе к другой системе отсчета. Именно это правило и является здесь физическим законом. Понятие – истинное время – просто не существует. Но существует понятие времени покоящихся часов стержня и понятие времени движущихся часов. Эти понятия определяются описанной здесь процедурой.

6 Понятие – одновременность событий

Пусть в системе K' есть два одновременных события в разнесенных в пространстве точках (в произвольный фиксированный момент времени t') – они описываются координатами

$$(t'_1 = t', x'_1)\,, \quad (t'_2 = t', x'_2)\,, \quad t'_2 - t'_1 = 0\,. \tag{6.1}$$

Эти два события можно сопроводить двумя вспышками света, наблюдение этих двух вспышек даст координаты событий в системе K (пользуемся преобразованиями Лоренца)

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad t_1 = \frac{t' + Vx'_1/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,,$$

$$x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad t_2 = \frac{t' + Vx'_2/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \tag{6.2}$$

Вычтем из 4-го уравнения 2-ое:

$$t_2 - t_1 = (x_2' - x_1')\,\frac{V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,; \qquad (6.3)$$

это соотношение можно описать словами: события одновременные в системе K' перестали быть таковыми в системе K. Порядок во времени этих событий с точки зрения системы отсчета K определяется знаком величины $(x_2' - x_1')$:

$$t_2 > t_1\,, \quad \text{если} \quad (x_2' - x_1') > 0\,;$$

$$t_2 < t_1\,, \quad \text{если} \quad (x_2' - x_1') < 0\,. \qquad (6.4)$$

Понятие одновременности событий зависит от выбора системы отсчета, в которой вы наблюдаете эти события. Это понятие имеет определение, и его свойства диктуются определением и преобразованиями Лоренца.

В дорелятивистской физике принималось, что одновременность событий априорно понятна и не требует никаких определений.

Но оказалось, что независимость скорости света от движения наблюдателя невозможно согласовать с этим старым пониманием одновременности. В теории относительности понятие одновременности событий получила свое определение, оно стало зависящим от состояния движения наблюдателя; и на этом новом уровне понимания теория оказалась вполне непротиворечивой логически.

7 Волны и релятивистский эффект Доплера

Рассмотрим волновой процесс, описываемый в движущейся системе K' следующей скалярной функцией:

$$A'(t',x') = a' \cos\omega'(t' - \frac{x'}{v'}) \; ; \tag{7.1}$$

при положительном v' формула описывает волну, распространяющуюся вправо; при отрицательном v' формула описывает волну, распространяющуюся влево. Как будет выглядеть эта волна с точки зрения системы отсчета K? Воспользовавшись преобразованием Лоренца

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \qquad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \tag{7.2}$$

перейдем в соотношении (7.1) к координатам (t, x):

$$A'(t', x') = a' \cos\omega' \left[\frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{1}{v'}\,\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\right] =$$

$$= a \cos\omega \frac{\omega'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \left[t(1 + \frac{V}{v'}) - x(\frac{1}{v'} + \frac{V}{c^2})\right] =$$

$$= a\ \cos\left\{\left(\omega' \frac{1 + V/v'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\right)\left(t - x\,\frac{1 + v'V/c^2}{v' + V}\right)\right\}. \tag{7.3}$$

Полученное представление волны можно переписать так:

$$A(t,x) = a\cos\omega(t - \frac{x}{v})\,, \tag{7.4a}$$

где

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}\,, \qquad \omega = \omega' \frac{1 + V/v'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,. \tag{7.4b}$$

Первое соотношение в (7.4b) – это уже знакомый релятивистский закон сложения скоростей. Второе соотношение в (7.4b) описывает зависимость частоты колебаний в волне от состояния движения наблюдателя K относительно наблюдателя K'. Это явление называют релятивистским эффектом Доплера.

В частности, для света формулы принимают вид

$$A(t,x) = a\cos\omega(t - \frac{x}{c})\,, \qquad \omega = \omega' \frac{1 + V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,. \tag{7.5}$$

8 Релятивистский математический аппарат. Механика

Многие (если не большинство) уравнений физики являются дифференциальными; они содержат производные по времени и по координатам. Например, основное уравнение механики

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \mathbf{F}\,. \tag{8.1}$$

Здесь можно обратить внимание на то, что дифференцирование по времени 3-мерного вектора снова дает 3-мерный вектор. Другими словами, из величины с простыми трансформационными свойствами (вектора) после дифференцирования опять получаем величину с простыми трансформационными свойствами (вектор).

Свойства симметрии физических уравнений очень важны, поскольку требования симметрии существенно ограничивают возможную математическую форму уравнений. Все существующие уравнения оказываются очень симметричными, поэтому

и при попытках написать новые уравнения мы всегда следим за свойствами симметрии этих новых уравнений, отбрасывая несимметричные варианты как непригодные.

Поэтому, чтобы иметь возможность записывать в дифференциальной форме физические законы в виде, инвариантном относительно преобразований Лоренца, следует прежде всего дать обобщение операции дифференцирования по времени. Оно должно быть таким, чтобы дифференцируя 4-мерный вектор, например $x^a = (x^0, x^i)$, получали бы в результате некий новый 4-мерный вектор.

Выполним такое обобщение.

Для этого рассмотрим две близкие точки на траектории движения частицы

$$x^a\,, \quad x^a + dx^a\,, \quad a = 0, 1, 2, 3\,;$$

величина dx^a является 4-вектором, и из нее можно легко построит величину, инвариантную относительно преобразований Лоренца (она является скаляром относительно преобразований Лоренца)

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = c^2 dt^2 \, (1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2})\,. \quad (8.2)$$

Другими словами, при определении дифференцирования вместо dt нужно использовать ds, это дает следующее:

$$\frac{d}{dt} \quad \Longrightarrow \quad c\,\frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}\,\frac{d}{dt}\,. \qquad (8.3)$$

Теперь, исходя из координатного 4-вектора,

определим 4-вектор, обобщающий нерелятивистский 3-вектор скорости:

$$U^a = \frac{dx^a}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}\,\frac{d}{cdt}\,(cdt, dx^i)\,,$$

т. е.

$$U^a = (\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}/c}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}})\,. \qquad (8.4)$$

Эта 4-мерная (безразмерная) релятивистская величина заменяет 3-мерный вектор (нерелятивистской) скорости.

При малых скоростях имеем предельный переход

$$\mathrm{v} << c \quad \Longrightarrow \quad c\,U^i \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{v}^i\,. \qquad (8.5)$$

9 Определение 4-импульса. Релятивистские энергия и импульс

Обобщение понятия импульса происходит так:

$$P^a = mc\, U^a = (\frac{mc}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}) = (P^0, P^i)\,. \quad (9.1)$$

Величину P^a называют 4-импульсом. Вычислим релятивистскую длину этого 4-импульса:

$$(P^0)^2 - \mathbf{P}^2 = m^2c^2 \ . \quad (9.2)$$

Энергия частицы определяется равенством

$$E \equiv c\, P^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}\,, \quad E = \sqrt{(mc^2)^2 + c^2\mathbf{P}^2}\,. \quad (9.3)$$

Согласно формуле (9.3), даже при нулевой скорости частицы массой m, у этой частицы есть некоторая энергия (покоя)

$$E_{\text{пок.}} = mc^2. \quad (9.4)$$

Формула связи энергии, массы, импульса оказывается имеющей смысл и при нулевой массе m (нулевой массе покоя)

$$E \equiv c\,P^0\,, \qquad E = \sqrt{c^2\mathbf{P}^2}\,. \tag{9.5}$$

Обратите внимание на свойство энергии частицы:

$$E \equiv c\ P^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}\,, \tag{9.6}$$

по мере приближения скорости частицы v к скорости света энергия этой частицы неограниченно увеличивается. Это означает, что сколько бы энергии в запасе у вас не было – это неизбежно конечная величина – вы не сможете разогнать частицу до скорости света. Для частиц с ненулевой массой покоя скорость света недостижима.

Можно найти количественную характеристику, описывающую этот эффект.

Введем вспомогательную переменную

$$x^2 = \mathrm{v}^2/c^2,$$

тогда

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad dE = -mc^2 \frac{x}{(1 - x^2)^{3/2}}\, dx\,; \tag{9.7}$$

при $x \to 1$ коэффициент при dx растет очень быстро.

Это означает, что энергетические затраты для разгона частиц в области $\mathrm{v} \to c$ $(x \to 1)$ растут очень быстро и стремятся к бесконечности.