

## **Уважаемые читатели!**

Сборник научных трудов преподавателей, сотрудников, аспирантов и студентов физико-математического факультета УО МГПУ имени И. П. Шамякина «Физико-математические науки и образование: проблемы и перспективы исследований» выходит в преддверии 70-летия факультета.

### ***Из истории факультета***

*23 февраля 1944 года Совет Народных комиссаров БССР принял постановление № 57 о возобновлении деятельности Рогачёвского института в городе Мозыре, который стал именоваться Мозырским учительским институтом.*

*15 марта 1944 года в составе института стали функционировать три отделения: физико-математическое, историко-лингвистическое и естественно-географическое.*

*В 1952 году физико-математическое отделение учительского института было реорганизовано в физико-математический факультет педагогического института.*

*В 1964 году в связи с открытием аналогичного факультета в Гомельском государственном педагогическом институте в Мозырском педагогическом институте была приостановлена подготовка кадров на физико-математическом факультете, а с 1977 года была возобновлена.*

*Большой вклад в становление и развитие факультета внесли его руководители. С 1944 по 2007 годы руководство факультетом осуществляли деканы: Писарчик Иван Васильевич (октябрь 1944 г. – май 1947 г.), Короткевич Михаил Федорович (ноябрь 1954 г. – ноябрь 1958 г.), Косарь Арсений Лаврентьевич (ноябрь 1958 г. – февраль 1961 г.), Башмаков Виктор Иванович (сентябрь 1977 г. – ноябрь 1982 г.), Судибор Григорий Прохорович (ноябрь 1982 г. – июль 2000 г.). Кралевич Ирина Николаевна (июль 2000 г. – сентябрь 2007 г.).*

*Физико-математический факультет был и остаётся одним из ведущих в вузе. Традиции, заложенные ведущими преподавателями и сотрудниками, успешно сохраняют и приумножают молодые талантливые педагоги.*

Сегодня на факультете созданы все условия для обеспечения высокого уровня современного педагогического образования. Как результат этого – успешное участие студентов в республиканских и международных олимпиадах по математике, физике, программированию. Традиционно студенты физико-математического факультета успешно участвуют во Всероссийской олимпиаде с международным участием по элементарной и высшей математике среди студентов педагогических вузов, которая проводится в режиме онлайн Уральским государственным педагогическим университетом (Россия, г. Екатеринбург). В 2010 г. и 2011 г. студенты факультета заняли первые места в личном и командном зачетах по

высшей и элементарной математике, в 2012 году – стали победителями в личном первенстве по высшей математике, в 2013 году завоевали третье место в личном первенстве по элементарной математике.

В республиканском конкурсе научных студенческих работ за последние пять лет приняли участие 16 работ студентов факультета, две работы из которых стали лауреатами конкурса, 3 удостоены первой категории, 6 работ – второй категории, пять работ – третьей категории.

На факультете достигнуты высокие показатели в научной деятельности. Учеными выполнялись задания в рамках Государственных программ научных исследований, реализовывались гранты Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований и Министерства образования Республики Беларусь, получены патенты на изобретения, изданы монографии. Результаты научных исследований коллектива преподавателей факультета получили признание в республике и за рубежом. На основании результатов конкурса, проведенного Национальной академией наук Беларусь, профессору Шепелевичу В.В. в составе коллектива ученых из Беларусь, Германии, России и Украины присуждена Международная премия имени академика Ф.И. Фёдорова 2011 года за цикл работ «Закономерности распространения и взаимодействия световых полей и развитие на их основе методов оптической диагностики».

На факультете особое внимание уделяется подготовке кадров высшей квалификации. В 2009–2013 гг. защитили диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук 5 преподавателей факультета: Гуцко Н.В. (н/р – проф. Скиба А.Н.), Николаенко Т.В. (н/р – проф. Кулак Г.В.), Овсиюк Е.М. (н/р – проф. Курочкин Ю.А.), Загорский А.Е.(н/р – проф. Шепелевич В.В.), Голуб А.А. (н/р – проф. Шепелевич В.В.).

Факультет тесно сотрудничает с отделами образования Гомельской области. Опыт использования в учебном процессе современных образовательных технологий постоянно обсуждается в рамках семинаров и конференций. На факультете ежегодно проводится Международная интернет-конференция «Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам».

Факультет динамично развивается, что выражается во внедрении в учебный процесс инновационных технологий, открытии новых специальностей, расширении международного сотрудничества.

Коллектив физико-математического факультета и в дальнейшем нацелен на реализацию важнейших государственных задач – выполнение практико-ориентированных исследований, использование современных технологий в преподавании, развитие науки и образования в Республике Беларусь.

**Е. С. Астрайко, Н. С. Астрайко, С. Я. Астрайко**

## **ДИДАКТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ИЗОБРЕТАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ**

Современный этап социально-экономического и научно-технического развития общества способствует углублению интеграции между наукой, техникой, производством и системой образования. Это способствует изменению характера и содержания профессионального труда учителя. Он все в большей степени опирается на интеграцию, комплексное применение теоретических знаний, широкий научно-технический кругозор, на сочетание различных видов творческой деятельности. Типичными для учителя физики и трудового обучения становятся проблемы, связанные с проектированием совместно со школьниками сложных систем, их модернизацией, диагностикой технического состояния. Решение таких задач требует от педагога не только определенных профессиональных знаний, но и подвижности трудовых функций, способности анализировать физические явления, технику и технологию, осуществлять поиск недостающей информации, обучать школьников изобретательской деятельности.

Разработка дидактических основ подготовки будущих учителей к изобретательской деятельности – это сложная многоаспектная проблема. Решение её требует совместных усилий представителей технических наук, а также философов, педагогов, методистов, психологов и других специалистов. Научно-педагогические исследования, ранее проводившиеся в этом направлении, как правило, носили разрозненный, эпизодический характер и осуществлялись в основном без соответствующего педагогического обоснования, только с опорой на опыт и интуитивные соображения исполнителей. Поэтому, несмотря на выполненные исследования отечественных и зарубежных исследователей в области развития творчества студентов, проблема подготовки будущих учителей к изобретательской деятельности в профессиональной сфере является на сегодняшний день не до конца решенной. Совершенствование подготовки, в частности учителя физики, сдерживается недостаточным уровнем разработанности ряда важнейших теоретических и практических вопросов, связанных с проектированием и реализацией технологии обучения студентов педагогического вуза изобретательской деятельности.

Отмеченные недостатки педагогической теории и практики порождают противоречие, которое определяет направление нашего исследования: с одной стороны, между возросшей потребностью совершенствования качества подготовки учителей физики к изобретательской деятельности, а с другой, – недостаточной разработанностью дидактических основ, ориентированных на опережающую подготовку к педагогической деятельности учителя физики в условиях динамично развивающегося производства, на преодоление профессионального функционализма, традиционно сложившегося и все еще имеющего место в педагогической практике вузов.

Обратимся к понятию «изобретательская деятельность», которая является своеобразной основой для развития различных отраслей человеческой жизнедеятельности и приводит к максимально эффективному использованию современных технологий и улучшению условий жизни для каждого человека. Она достаточно многогранная: это и решение изобретательских задач, и конструирование чего-то нового, не похожего на известное, но необходимого и незаменимого.

История изобретательской деятельности столь же продолжительна, как и история человечества. Ценность её состоит не только в создании изобретений, но также в повышении квалификации и опытности изобретателей. Сами изобретатели также личности неординарные и разносторонне развитые. Леонардо да Винчи, Томас Эдисон, Никола Тесла. Этих людей знают все, но мало кто задумывался, что сама изобретательская деятельность может широко использоваться учителями в общеобразовательной школе. Курс физики, в частности, подходит для этого как нельзя лучше. Мало кто из учащихся откажется оказаться ближе к величайшим изобретателям, пройти путь создания выдающихся изобретений хотя бы через решение соответствующих задач.

Если же говорить о понятии, то *изобретательская задача* – основной объект теории решения изобретательских задач (ТРИЗ) [3]. Изобретательская задача отличается от задач технических, инженерных, конструкторских тем, что в ходе ее решения необходимо разрешить некоторое противоречие (административное, техническое или физическое).

Под *учебной изобретательской задачей* мы понимаем творческую задачу, условие или вопрос которой требует от учащегося повторить изобретение или объяснить то или иное изобретение на уровне идей.

В этом состоит главное отличие учебных изобретательских задач от изобретательских задач, возникающих в процессе развития техники. Изобретательские задачи требуют новых решений, доводятся до внедрения в практику с целью прогрессивных изменений в технике. Однако методы решения изобретательских задач и учебных изобретательских задач, а также психологические особенности процесса решения задач обоих типов идентичны.

По мнению В.П. Пархоменко [2], изобретательские задачи можно подразделить на пять уровней сложности: I уровень – объект (устройство или способ) не изменяется; II уровень – объект изменяется, но незначительно; III уровень – объект изменяется значительно; IV уровень – объект меняется полностью; V уровень – меняется вся техническая система, в которую входит объект.

Изобретательская деятельность относится к творческой деятельности и как любой вид творческой деятельности приводит к повышению эффективности обучения учащихся, определяет успешность всей работы педагогов. В наше время большинство учителей, в том числе и учителя физики, сталкиваются с такой проблемой, как отсутствие интереса учеников к изучаемому предмету. Это серьезная проблема для всей системы образования. Как же заинтересовать школьника физикой?

Только с помощью демонстрации опытов учитель физики может доказать значимость изучаемого закона либо понятия, объяснить принцип работы механизмов. Вовлечение школьников в учебную деятельность может происходить через решение задач и проведение лабораторных работ. Но не всегда в школьной лаборатории хватает на всех учебных приборов, а нередко их нет даже для отдельной демонстрации. Частично это связано с тем, что на территории нашей республики нет завода, специализирующегося на изготовлении школьных приборов, и зачастую учителям приходится пользоваться оборудованием десятилетней давности, а иногда и старше.

Одним из выходов из сложившейся ситуации можно назвать моделирование опытов и демонстраций на компьютере, но найти соответствующего специалиста может быть еще труднее, чем недостающее оборудование. Кроме того, не в каждом кабинете физики есть компьютер и проектор.

Другим выходом из сложившейся ситуации может стать проведение факультативных либо дополнительных занятий кружкового типа на базе школьных мастерских. На таких занятиях или даже на уроках трудового обучения можно организовать непосредственное изобретение новых, а также изготовление аналогов уже существующих приборов, которые могли бы использоваться при изучении физики. Сюда можно включить и самостоятельную работу учащихся по поиску наилучшего решения, оптимальной конструкции физического прибора.



Рисунок 1 – Прибор  
для демонстрации беспроводной  
передачи энергии



Рисунок 2 – Демонстрация  
беспроводной передачи энергии

Известные психологи В.П. Зинченко и С.Д. Смирнов [1] установили следующую закономерность (закономерность Смирнова-Зинченко): учащийся может запомнить материал непроизвольно, если выполняет над ним активную мыслительную деятельность и она направлена на

понимание этого материала. Это значит, что учащиеся, занявшись изобретательской деятельностью под руководством учителя будут лучше разбираться в физике, этот вид деятельности предполагает применение имеющихся знаний в новых ситуациях, развитие умений анализа, которые будут применяться в дальнейшем как во всех видах учебной работы, так и в повседневной жизни.

Здесь преподаватель выступает в виде творца, вовлекая учеников в изобретательскую деятельность, пробуждая в них любознательность и интерес к миру физических экспериментов. Но, с одной стороны, учащиеся увлекаются физикой, а с другой – изготавливают необходимое школе оборудование. Важно и то, что сложность изготавливаемых приборов может быть любой, использоваться могут самые разнообразные материалы – от ниток, картона и бумаги до металлов, органического стекла и электротехнических устройств. Это позволяет заниматься данным видом деятельности учащимся любого возраста. Кроме того, укрепляются и развиваются межпредметные связи, особенно с трудовым обучением, математикой, химией и т. д.

В процессе познавательной практической деятельности с помощью возможного стимулирования положительными оценками за качественное выполнение работы можно заинтересовать в получении конечного результата даже слабоуспевающих учеников. Так как совместная работа сближает людей, объединенных общей целью, совместное техническое творчество учителя физики и учеников может стать основой для значительного улучшения психологического микроклимата в классе, создания прочного коллектива, стать стартовой площадкой для творческого раскрепощения детей, нашедших возможность для самореализации.

Выделим формы и методы включения обучающихся в изобретательскую деятельность: факультативы и кружки; конструирование физических приборов; выпуск стенгазеты «Юный изобретатель»; решение изобретательских задач на занятиях и дома; чтение научно-популярной литературы; самостоятельное составление и решение физических изобретательских задач; участие и организация изобретательских конкурсов и т. д.

В рамках занятия студенческого кружка «Инноватор» был изготовлен прибор для демонстрации беспроводной передачи энергии (рисунки 1, 2).

В заключение отметим, что включение обучающихся в изобретательскую деятельность, в частности, решение изобретательских задач способствует у них развитию устойчивого познавательного интереса, а вместе с ним – интереса к изучаемой науке; позволяет формировать навыки в изготовлении простейших приборов при использовании подручного материала, моделировании и конструировании; развивает наблюдательность и любознательность; способствует развитию логического мышления.

#### Литература

1. Зинченко, В.П. Методологические вопросы психологии / В.П. Зинченко, С.Д. Смирнов. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 165 с.
2. Пархоменко, В.П. Основы технического творчества / В.П. Пархоменко. – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2000. – 147 с.
3. Что такое "ТРИЗ"? Режим доступа: <http://www.triz-ri.ru/triz/>. – Дата доступа: 18.04.2013.

### С. М. Бирук

## СУПЕРПОЗИЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПУАНКАРЕ И БЕНДИКСОНА

**Введение.** Рассмотрим обыкновенную автономную дифференциальную систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^n X_i(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^n Y_i(x, y), \quad (1)$$

где  $X_i : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  и  $Y_i : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  – однородные полиномы  $i$ -й степени с коэффициентами из поля  $\mathbf{R}$ .

При этом  $|X_n(x, y)| + |Y_n(x, y)| \neq 0$  на  $\mathbf{R}^2$ , что соответствует тому, что хотя бы одна из производных представляется полиномом  $n$ -й степени.

В [1–5] дифференциальная система (1) была рассмотрена с позиции поведения её траекторий на круге Пуанкаре, сфере Пуанкаре и сфере Бендиクсона. Кроме того, в [1–4] рассмотрены вопросы взаимосвязи между поведением траекторий системы (1) и её первой и

второй приведённых систем Пуанкаре, а также вопросы топологической эквивалентности дифференциальных систем на сфере Пуанкаре. В [5] установлена взаимосвязь между поведением траекторий системы (1) на сфере Пуанкаре и сфере Бендиксона.

Целью данной статьи является установление взаимосвязи между поведением траекторий дифференциальной системы (1) и систем, полученных из неё в результате суперпозиции преобразований Пуанкаре

$$x = y_1^{-1}, \quad y = x_1 y_1^{-1} \quad \text{и} \quad x = x_2^{-1} y_2, \quad y = x_2^{-1}$$

(первого и второго соответственно) и преобразования Бендиксона

$$x = 4y_3(x_3^2 + y_3^2)^{-1}, \quad y = 4x_3(x_3^2 + y_3^2)^{-1}.$$

**Двукратное преобразование системы (1).** Интерес представляет лишь суперпозиция одного из преобразований Пуанкаре и преобразования Бендиксона.

**Предложение 1.** В результате суперпозиции первого преобразования Пуанкаре и преобразования Бендиксона, или преобразования

$$x = (x_4^2 + y_4^2)(4x_4)^{-1}, \quad y = y_4 x_4^{-1}, \quad (2)$$

система (1) приводится к полиномиальной системе

$$\begin{aligned} \frac{dx_4}{d\tau_4} &= 4x_4^2 \sum_{i=0}^n (4x_4)^{n-i} X_i(x_4^2 + y_4^2, 4y_4) - \\ &\quad - 2x_4^2 y_4 \sum_{i=0}^n (4x_4)^{n-i} Y_i(x_4^2 + y_4^2, 4y_4), \\ \frac{dy_4}{d\tau_4} &= 4x_4 y_4 \sum_{i=0}^n (4x_4)^{n-i} X_i(x_4^2 + y_4^2, 4y_4) + \\ &\quad + x_4(x_4^2 - y_4^2) \sum_{i=0}^n (4x_4)^{n-i} Y_i(x_4^2 + y_4^2, 4y_4), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $(x_4^2 + y_4^2)(4x_4)^n d\tau_4 = dt$ .

Преобразование (2) назовём  $BP_1$ -преобразованием. Дифференциальную систему (3) назовём  $BP_1$ -приведённой системой, индуцированной системой (1).

**Свойство 1.** Если точка  $M(x, y)$  является состоянием равновесия системы (1), расположенным в конечной части фазовой плоскости  $(x, y)$ , и не лежит на оси ординат  $Oy$ , то точка  $M' \left( \frac{4x}{1+y^2}, \frac{4xy}{1+y^2} \right)$  является состоянием равновесия  $BP_1$ -приведённой системы (3), не лежащим на оси  $O'y_4$ . При этом вид состояний равновесия  $M$  и  $M'$  одинаков.

**Свойство 2.** Если точка  $N'(x_4, y_4)$  является состоянием равновесия  $BP_1$ -приведённой системы (3), расположенным в конечной части фазовой плоскости  $(x_4, y_4)$ , и не лежит на оси ординат  $O'y_4$ , то точка  $N \left( \frac{x_4^2 + y_4^2}{4x_4}, \frac{y_4}{x_4} \right)$ , не лежащая на оси  $Oy$ , является состоянием равновесия системы (1) того же вида, что и состояние равновесия  $N'$ .

**Свойство 3.** Поведение траекторий системы (3), расположенных в полуплоскости  $x_4 > 0$ , биективно соответствует поведению траекторий системы (1), расположенных в полуплоскости  $x > 0$ , с сохранением направления движения вдоль траекторий. Поведение траекторий системы (3), расположенных в полуплоскости  $x_4 < 0$ , биективно, с точностью до направления движения вдоль траекторий, соответствует поведению траекторий системы (1), расположенных в полуплоскости  $x < 0$ .

**Свойство 4.** Поведение траекторий системы (3) в окрестности оси ординат  $O'y_4$  фазовой плоскости  $(x_4, y_4)$ , из которой удалена точка  $O'$ , с точностью до направления движения вдоль траекторий, соответствует поведению траекторий системы (1) в

окрестности бесконечно удалённой прямой  $y_1 = 0$  проективной фазовой плоскости  $(y_1, x, y)$ , из которой удалены точки, соответствующие «концам» координатных осей  $Ox$  и  $Oy$ .

При этом точке  $B'(0, b)$  фазовой плоскости  $(x_4, y_4)$ , соответствует бесконечно удалённая точка проективной фазовой плоскости  $(y_1, x, y)$  системы (1), размещённая на «концах» прямой  $4x - by = 0$ .

**Свойство 5.** Поведение траекторий системы (3) в окрестности начала координат  $O'$  её фазовой плоскости  $(x_4, y_4)$  определяется поведением траекторий системы (1) в окрестности оси ординат  $Oy$  проективной фазовой плоскости  $(y_1, x, y)$ .

Если точка  $A(0, a)$  лежит на конечной части фазовой плоскости  $(x, y)$ , то  $A$ -траекториям системы (1) соответствуют  $O'$ -траектории системы (3), примыкающие к  $O'$  в направлении прямой  $y_4 = ax_4$ .

Траекториям системы (1), примыкающим к «концам» оси  $Oy$  соответствуют  $O'$ -траектории системы (3), примыкающие к  $O'$  в направлении оси  $O'y_4$ .

Соответствие между секторами Бендиксона состояний равновесия системы (1), лежащих на оси  $Oy$ , и секторами Бендиксона состояния равновесия  $O'$  системы (3) определяется принципами, описанными в [5].

**Свойство 6.** Поведение траекторий системы (3) в окрестности бесконечно удалённой точки фазовой плоскости  $(x_4, y_4)$  соответствует поведению траекторий системы (1) в окрестности бесконечно удалённой точки, лежащей на «концах» оси  $Ox$  проективной фазовой плоскости  $(y_1, x, y)$ .

**Предложение 2.** В результате суперпозиции второго преобразования Пуанкаре и преобразования Бендиксона, или преобразования

$$x = x_5 y_5^{-1}, \quad y = (x_5^2 + y_5^2)(4y_5)^{-1}, \quad (4)$$

система (1) приводится к полиномиальной системе

$$\begin{aligned} \frac{dx_5}{d\tau_5} &= y_5(y_5^2 - x_5^2) \sum_{i=0}^n (4y_5)^{n-i} X_i(4x_5, x_5^2 + y_5^2) + \\ &\quad + 4x_5 y_5 \sum_{i=0}^n (4y_5)^{n-i} Y_i(4x_5, x_5^2 + y_5^2), \\ \frac{dy_5}{d\tau_5} &= -2x_5 y_5^2 \sum_{i=0}^n (4y_5)^{n-i} X_i(4x_5, x_5^2 + y_5^2) + \\ &\quad + 4y_5^2 \sum_{i=0}^n (4y_5)^{n-i} Y_i(4x_5, x_5^2 + y_5^2), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $(x_5^2 + y_5^2)(4y_5)^n d\tau_5 = dt$ .

Преобразование (4) назовём  $BP_2$ -преобразованием. Дифференциальную систему (5) назовём  $BP_2$ -приведённой системой, индуцированной системой (1).

**Свойство 7.** Если точка  $M(x, y)$  является состоянием равновесия системы (1), расположенным в конечной части фазовой плоскости  $(x, y)$ , и не лежит на оси абсцисс  $Ox$ , то точка  $M' \left( \frac{4xy}{1+x^2}, \frac{4y}{1+x^2} \right)$  является состоянием равновесия  $BP_2$ -приведённой системы (5), не лежащим на оси  $O'y_5$ . При этом вид состояний равновесия  $M$  и  $M'$  одинаков.

**Свойство 8.** Если точка  $N'(x_5, y_5)$  является состоянием равновесия  $BP_2$ -приведённой системы (5), расположенным в конечной части фазовой плоскости  $(x_5, y_5)$ , и не лежит на оси

абсцисс  $O'x_5$ , то точка  $N\left(\frac{x_5}{y_5}, \frac{x_5^2 + y_5^2}{4y_5}\right)$ , не лежащая на оси  $Ox$ , является состоянием равновесия системы (1) того же вида, что и состояние равновесия  $N'$ .

**Свойство 9.** Поведение траекторий системы (5), расположенных в полуплоскости  $y_5 > 0$ , биективно соответствует поведению траекторий системы (1), расположенных в полуплоскости  $y > 0$ , с сохранением направления движения вдоль траекторий. Поведение траекторий системы (5), расположенных в полуплоскости  $y_5 < 0$ , биективно, с точностью до направления движения вдоль траекторий, соответствует поведению траекторий системы (1), расположенных в полуплоскости  $y < 0$ .

**Свойство 10.** Поведение траекторий системы (5) в окрестности оси абсцисс  $O'x_5$  фазовой плоскости  $(x_5, y_5)$ , из которой удалена точка  $O'$ , с точностью до направления движения вдоль траекторий, соответствует поведению траекторий системы (1) в окрестности бесконечно удалённой прямой  $y_1 = 0$  проективной фазовой плоскости  $(y_1, x, y)$ , из которой удалены точки, соответствующие «концам» координатных осей  $Ox$  и  $Oy$ .

При этом точке  $B'(b, 0)$  фазовой плоскости  $(x_5, y_5)$  соответствует бесконечно удалённая точка проективной фазовой плоскости  $(y_1, x, y)$  системы (1), размещённая на «концах» прямой  $bx - 4y = 0$ .

**Свойство 11.** Поведение траекторий системы (5) в окрестности начала координат  $O'$  её фазовой плоскости  $(x_5, y_5)$  определяется поведением траекторий системы (1) в окрестности оси абсцисс  $Ox$  проективной фазовой плоскости  $(y_1, x, y)$ .

Если точка  $A(a, 0)$  лежит на конечной части фазовой плоскости  $(x, y)$ , то  $A$ -траекториям системы (1) соответствуют  $O'$ -траектории системы (5), примыкающие к  $O'$  в направлении прямой  $x_5 = ay_5$ .

Траекториям системы (1), примыкающим к «концам» оси  $Ox$ , соответствуют  $O'$ -траектории системы (5), примыкающие к  $O'$  в направлении оси  $O'x_5$ .

Соответствие между секторами Бендиクсона состояний равновесия системы (1), лежащих на оси  $Ox$ , и секторами Бендиクсона состояния равновесия  $O'$  системы (5) определяется принципами, описанными в [5].

**Свойство 12.** Поведение траекторий системы (5) в окрестности бесконечно удалённой точки фазовой плоскости  $(x_5, y_5)$  соответствует поведению траекторий системы (1) в окрестности бесконечно удалённой точки, лежащей на «концах» оси  $Oy$  проективной фазовой плоскости  $(y_1, x, y)$ .

**Предложение 3.** В результате суперпозиции преобразования Бендиクсона и первого преобразования Пуанкаре, или преобразования

$$x = 4x_6 y_6 (1+x_6)^{-1}, \quad y = 4y_6 (1+x_6)^{-1}, \quad (6)$$

система (1) приводится к полиномиальной системе:

$$\begin{aligned} \frac{dx_6}{d\tau_6} &= (1+x_6^2) \sum_{i=0}^n (1+x_6^2)^{n-i} X_i(4x_6 y_6, 4y_6) - \\ &\quad - x_6 (1+x_6^2) \sum_{i=0}^n (1+x_6^2)^{n-i} X_i(4x_6 y_6, 4y_6), \\ \frac{dy_6}{d\tau_6} &= 2x_6 y_6 \sum_{i=0}^n (1+x_6^2)^{n-i} X_i(4x_6 y_6, 4y_6) + \\ &\quad + y_6 (1-x_6^2) \sum_{i=0}^n (1+x_6^2)^{n-i} X_i(4x_6 y_6, 4y_6), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $4y_6(1+x_6^2)^n d\tau_6 = dt$ .

Преобразование (6) назовём  $P_1B$ -преобразованием. Дифференциальную систему (7) назовём  $P_1B$ -приведённой системой, индуцированной системой (1).

**Свойство 13.** Если точка  $M(x, y)$  является состоянием равновесия системы (1), расположенным в конечной части фазовой плоскости  $(x, y)$  и не лежит на оси абсцисс  $Ox$ ,

то      точка       $M'\left(\frac{x}{y}, \frac{x^2 + y^2}{4y}\right)$       является      состоянием      равновесия

$P_1B$ -приведённой системы (7), не лежащим на оси  $O'x_6$ . При этом вид состояний равновесия  $M$  и  $M'$  одинаков.

**Свойство 14.** Если точка  $N'(x_6, y_6)$  является состоянием равновесия  $P_1B$ -приведённой системы (7), расположенным в конечной части фазовой плоскости  $(x_6, y_6)$ , и не лежит на оси абсцисс  $O'x_6$ , то точка  $N\left(\frac{4x_6y_6}{1+x_6^2}, \frac{4y_6}{1+x_6^2}\right)$ , не лежащая на оси  $Ox$ , является состоянием равновесия системы (1) того же вида, что и состояние равновесия  $N'$ .

**Свойство 15.** Поведение траекторий системы (7), расположенных в полуплоскости  $y_6 > 0$ , биективно соответствует поведению траекторий системы (1), расположенных в полуплоскости  $y > 0$ , с сохранением направления движения вдоль траекторий. Поведение траекторий системы (7), расположенных в полуплоскости  $y_6 < 0$ , биективно соответствует поведению траекторий системы (1), расположенных в полуплоскости  $y < 0$ , с изменением направления движения вдоль траекторий на противоположное.

**Свойство 16.** Поведение траекторий системы (1) в окрестности начала координат  $O$  её фазовой плоскости  $(x, y)$  определяется поведением траекторий системы (7) в окрестности оси абсцисс  $O'x_6$  её проективной фазовой плоскости  $(x_3, x_6, y_6)$ .

Если точка  $A'(a, 0)$  лежит на конечной части фазовой плоскости  $(x_6, y_6)$ , то  $A'$ -траекториям системы (7) соответствуют  $O$ -траектории системы (1), примыкающие к  $O$  в направлении прямой  $x = ay$ .

Траекториям системы (7), примыкающим к «концам» оси  $O'x_6$ , соответствуют  $O$ -траектории системы (1), примыкающие к  $O$  в направлении оси  $Ox$ .

Соответствие между секторами Бендиクсона состояний равновесия системы (7), лежащих на оси  $O'x_6$ , и секторами Бендиクсона состояния равновесия  $O$  системы (1) определяется принципами, описанными в [5].

**Свойство 17.** Поведение траекторий системы (7) в окрестности бесконечно удалённой прямой  $x_3 = 0$  проективной фазовой плоскости  $(x_3, x_6, y_6)$ , из которой удалены точки, соответствующие «концам» координатных осей  $O'x_6$  и  $O'y_6$ , с точностью до направления движения вдоль траекторий, соответствует поведению траекторий системы (1) в окрестности оси абсцисс  $Ox$  фазовой плоскости  $(x, y)$ , из которой удалена точка  $O$ .

При этом бесконечно удалённой точке проективной фазовой плоскости  $(x_3, x_6, y_6)$ , размещённой на «концах» прямой  $y_6 = bx_6$ , соответствует точка  $B(4b, 0)$  фазовой плоскости  $(x, y)$  системы (1).

**Свойство 18.** Поведение траекторий системы (7) в окрестности бесконечно удалённой точки проективной фазовой плоскости  $(x_3, x_6, y_6)$ , размещённой на «концах» оси ординат  $O'y_6$ , с точностью до направления движения вдоль траекторий, соответствует поведению траекторий системы (1) в окрестности бесконечно удалённой точки фазовой плоскости  $(x, y)$ .

**Предложение 4.** В результате суперпозиции преобразования Бендиксона и второго преобразования Пуанкаре, или преобразования

$$x = 4x_7(1 + y_7^2)^{-1}, \quad y = 4x_7y_7(1 + y_7^2)^{-1}, \quad (8)$$

система (1) приводится к полиномиальной системе:

$$\begin{aligned} \frac{dx_7}{d\tau_7} &= x_7(1 - y_7^2) \sum_{i=0}^n (1 + y_7^2)^{n-i} X_i(4x_7, 4x_7y_7) + \\ &\quad + 2x_7y_7 \sum_{i=0}^n (1 + y_7^2)^{n-i} Y_i(4x_7, 4x_7y_7), \\ \frac{dy_7}{d\tau_7} &= -y_7(1 + y_7^2) \sum_{i=0}^n (1 + y_7^2)^{n-i} X_i(4x_7, 4x_7y_7) + \\ &\quad + (1 + y_7^2) \sum_{i=0}^n (1 + y_7^2)^{n-i} Y_i(4x_7, 4x_7y_7), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $4x_7(1 + y_7^2)^n d\tau_7 = dt$ .

Преобразование (8) назовём  $P_2B$ -преобразованием. Дифференциальную систему (9) назовём  $P_2B$ -приведённой системой, индуцированной системой (1).

**Свойство 19.** Если точка  $M(x, y)$  является состоянием равновесия системы (1), расположенным в конечной части фазовой плоскости  $(x, y)$ , и не лежит на оси ординат  $Oy$ , то точка  $M' \left( \frac{x^2 + y^2}{4x}, \frac{y}{x} \right)$  является состоянием равновесия  $P_2B$ -приведённой системы (9), не лежащим на оси  $O'y_7$ . При этом вид состояний равновесия  $M$  и  $M'$  одинаков.

**Свойство 20.** Если точка  $N'(x_7, y_7)$  является состоянием равновесия  $P_2B$ -приведённой системы (9), расположенным в конечной части фазовой плоскости  $(x_7, y_7)$ , и не лежит на оси ординат  $O'y_7$ , то точка  $N \left( \frac{4x_7}{1 + y_7^2}, \frac{4x_7y_7}{1 + y_7^2} \right)$ , не лежащая на оси  $Oy$ , является состоянием равновесия системы (1) того же вида, что и состояние равновесия  $N'$ .

**Свойство 21.** Поведение траекторий системы (9), расположенных в полуплоскости  $x_7 > 0$ , биективно соответствует поведению траекторий системы (1), расположенных в полуплоскости  $x > 0$ , с сохранением направления движения вдоль траекторий. Поведение траекторий системы (9), расположенных в полуплоскости  $x_7 < 0$ , биективно соответствует поведению траекторий системы (1), расположенных в полуплоскости  $x < 0$ , с изменением направления движения вдоль траекторий на противоположное.

**Свойство 22.** Поведение траекторий системы (1) в окрестности начала координат  $O$  её фазовой плоскости  $(x, y)$  определяется поведением траекторий системы (9) в окрестности оси ординат  $O'y_7$  её проективной фазовой плоскости  $(y_3, x_7, y_7)$ .

Если точка  $A'(0, a)$  лежит на конечной части фазовой плоскости  $(x_7, y_7)$ , то  $A'$ -траекториям системы (9) соответствуют  $O$ -траектории системы (1), примыкающие к  $O$  в направлении прямой  $y = ax$ .

Траекториям системы (9), примыкающим к «концам» оси  $O'y_7$ , соответствуют  $O$ -траектории системы (1), примыкающие к  $O$  в направлении оси  $Oy$ .

Соответствие между секторами Бендиксона состояний равновесия системы (9), лежащих на оси  $O'y_7$ , и секторами Бендиксона состояния равновесия  $O$  системы (1) определяется принципами, описанными в [5].

**Свойство 23.** Поведение траекторий системы (9) в окрестности бесконечно удалённой прямой  $y_3 = 0$  проективной фазовой плоскости  $(y_3, x_7, y_7)$ , из которой удалены точки соответствующие «концам» координатных осей  $O'x_7$  и  $O'y_7$ , с точностью до направления движения вдоль траекторий, соответствует поведению траекторий системы (1) в окрестности оси ординат  $Oy$  фазовой плоскости  $(x, y)$ , из которой удалена точка  $O$ .

При этом бесконечно удалённой точке проективной фазовой плоскости  $(y_3, x_7, y_7)$ , размещённой на «концах» прямой  $y_7 = bx_7$ , соответствует точка  $B(0,4b)$  фазовой плоскости  $(x, y)$  системы (1).

**Свойство 24.** Поведение траекторий системы (9) в окрестности бесконечно удалённой точки проективной фазовой плоскости  $(y_3, x_7, y_7)$ , размещённой на «концах» оси абсцисс  $O'x_7$ , с точностью до направления движения вдоль траекторий, соответствует поведению траекторий системы (1) в окрестности бесконечно удалённой точки фазовой плоскости  $(x, y)$ .

**Свойство 25.** Преобразования  $BP_1$  и  $P_2B$  взаимно обратны.

**Свойство 26.** Преобразования  $BP_2$  и  $P_1B$  взаимно обратны.

**Заключение.** В продолжение [1–5] установлены свойства взаимосвязи между поведением траекторий дифференциальной системы (1) и систем (3), (5), (7), (9), полученных из неё в результате суперпозиции преобразований Пуанкаре и Бендиксона.

#### Литература

1. Горбузов, В.Н. Траектории полиномиальной дифференциальной системы на сфере Пуанкаре / В.Н. Горбузов, И.В. Королько // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 845–846.
2. Горбузов, В.Н. Траектории полиномиальной дифференциальной системы на сфере Пуанкаре / В.Н. Горбузов, И.В. Королько. – Минск, 2001. – 21 с. – Деп. в ВИНИТИ 29.05.2001, № 1363-B2001 // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 845–846.
3. Горбузов, В.Н. Проективный атлас траекторий дифференциальных систем второго порядка / В.Н. Горбузов // Веснік ГрДзУ. Сер. 2. – 2011. – № 2(111). – С. 15–26.
4. Горбузов, В.Н. Траектории проективно приведенных дифференциальных систем / В.Н. Горбузов // Веснік ГрДзУ. Сер. 2. – 2012. – № 1(126). – С. 39–52.
5. Горбузов, В.Н. Траектории дифференциальных систем на сфере Бендиксона / В.Н. Горбузов, И.В. Королько, В.Ю. Тышленко // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 4. – С. 15–19.
6. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов [и др.]. – Минск: Наука, 1966. – 568 с.

**С. Р. Бондарь, О. В. Старовойтова**

### КРИТЕРИАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ТЕСТЫ В СИСТЕМЕ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ

Образовательный процесс в Республике Беларусь, отличительной чертой которого является демократизация, предполагает право педагогов на творчество, на свободу выбора педагогических технологий, в том числе и технологии измерения и оценки учебных достижений учащихся как управляемых процессов, гарантирующих достижение поставленных целей. Он воплощается в двух основных инновационных подходах к совершенствованию обучения – технологическом и поисковом. Тесты являются инструментом технологического подхода, который модернизирует традиционное обучение, базирующееся на основе преобладающей репродуктивной деятельности учащихся. Информатизация общества и образования детерминировала адекватное обновление содержания и оценки учебных достижений в образовательном учреждении. Государственные стандарты в области основного, среднего, образования отражают концепцию, соответствующую социальным и экономическим условиям развития страны и определяют требования к уровню подготовки выпускников. Цели, требования, методы контроля обучения дают эталонный уровень образования, необходимый для данного общества в определенный исторический отрезок времени.

Анализ логико-философской, психолого-педагогической, методической литературы, практика школьного обучения свидетельствуют, что в последние годы отчетливо выявились

особая значимость проблемы целенаправленного развития процесса измерения и оценки учебных достижений учащихся. Сформировалось новое направление научных исследований, внесшее существенный вклад в теорию и практику ориентированного обучения.

Термин «критериально-ориентированное тестирование» впервые был предложен Р. Гласером. Сегодня в зарубежной педагогической практике критериально-ориентированные тесты широко используются наряду с нормативно-статистическими тестами достижений.

В основе современных представлений об измерении и оценке учебных достижений учащихся лежит личностный подход (А.Д. Алферов, Е.В. Бондаревская, А.И. Кочетов и т. д.). В настоящее время выявлены особенности личностного развития, зависящие от групповых и коллективных форм учебной работы (Б.Ф. Ломов, Р.С. Немов, А.В. Петровский), изучена продуктивность различных форм деятельности, в том числе и по фиксации уровня учебных достижений учащихся (М.Д. Виноградов, В.Я. Ляудис, Т.А. Матис, В.П. Тарантай).

Проблемы оптимизации учебного процесса, измерений и оценки учебных достижений учащихся в последние годы непосредственно связаны с введением в практику обучения учебно-познавательных задач и заданий (В.В. Агеев, И.Я. Лerner, Л.М. Фридман и др.).

Высокий уровень потребностей в объективном инструменте измерения учебных достижений учащихся подтверждается появившимися в последнее время многочисленными тестами в отечественной педагогике. Однако использование их учителем, не обладающим достаточным опытом, довольно сложно. Ряд существенных аспектов измерения и оценки учебных достижений учащихся нуждается в дальнейшем исследовании. Прежде всего, это проблема составления содержательной части гомогенных критериально-ориентированных тестов, использующихся в реализации коррекционной программы и выполняющих функцию обучения.

До сих пор нет единства мнений в определении сущности диагностики учебных достижений учащихся, ситуации полного усвоения учащимися учебного материала. Недостаточно изучены механизмы тестирования для контроля и обучения как целостного процесса, особенности критериально-ориентированного тестирования как средства изучения и оценки учебных достижений учащихся, формы представления тестовых заданий в конкретной совместной деятельности учителя и ученика.

Основной путь устранения указанных недостатков и интенсификация процесса оценивания знаний, умений и навыков – это создание новых научных технологий измерения и оценки учебных достижений учащихся и механизма внедрения этих технологий в учебный процесс. Также технологии должны разрабатываться на основе философско-методологических, психолого-педагогических знаний и быть направленными на преодоление существующего разрыва между теорией и практикой.

Констатация учебных достижений учащихся связана с необходимостью преодоления ряда существенных противоречий: 1) между существующей в теории ориентацией на объективность результатов обучения в образовательном процессе и практикой репродуктивного обучения, в котором слабо представлены личностные аспекты субъекта образовательного процесса; 2) между требованиями стандарта школ Республики Беларусь в применении критериально-ориентированного тестирования как средства контроля знаний учащихся и отсутствием опыта разработки содержательной части гомогенных и гетерогенных тестов для данного вида тестирования; 3) между традиционной структурой учебных планов ВУЗов и насущными требованиями практики по введению в них новых дисциплин, расширяющих теоретическую и практическую подготовку учителей к осуществлению объективного дифференцированного оценивания результатов познавательной деятельности обучающихся; 4) между оценкой, которую выставляет педагог при использовании традиционных средств контроля, и оценкой, которая является итогом тестирования (из-за отсутствия навыка в применении тестов).

### Литература

1. Аванесов, В.С. Тесты в социологическом исследовании / В.С. Аванесов. – М.: Наука, 1982. – 199 с.
2. Лerner, И.Я. Базовое содержание общего образования / И.Я. Лerner. – М.: Изд-во АПН СССР, 1991.
3. Стрюков, Г.А. О единстве критериального и нормативного подходов к оцениванию знаний учащихся / Г.А. Стрюков // Психологический журнал. – 1995. – № 2. – С. 120–127.
4. Афонина, Л.И. Критериально-ориентированное тестирование как эффективное средство измерения и оценки учебных достижений учащихся средних образовательных учреждений: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01 / Л.И. Афонина. – Саратов, 2000. – 207 л.

**Я. А. Войнова**

## **ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ**

Качество образования является сегодня одним из важнейших приоритетов государственной политики в области образования. В современном мире информатизации образовательного процесса всё большее внимание уделяется самостоятельному изучению и углублению школьного материала. На основании этого модернизируются различные аспекты и подходы к качеству образования: повышение образовательных результатов, развитие системы повышения квалификации учителей, улучшение организации образовательного процесса. Одним из возможных путей решения данных проблем является широкое использование в учебном процессе электронного тестирования для мониторинга знаний и интеграции школьных и дистанционных форм обучения.

Применение компьютерных технологий в образовании вносит в развитие человека различные изменения, которые относятся как к познавательным, так и к эмоционально-мотивационным процессам, они влияют на характер человека, при этом, по мнению О.К. Тихомирова [1], отмечается усиление познавательной мотивации обучаемых при работе с компьютером. Использование средств ИКТ в обучении способствует также увеличению доли самостоятельной учебной деятельности и активизации обучаемого, «формированию личности обучаемого за счет развития его способности к образованию, самообучению, самовоспитанию, самоактуализации, самореализации» [2]. Они также влияют на формирование теоретического, творческого и модульно-рефлексивного мышления обучаемых, компьютерная визуализация учебной информации оказывает существенное влияние на формирование представлений, занимающих центральное место в образном мышлении, а образность представлений тех или иных явлений и процессов в памяти обучаемого обогащает восприятие учебного материала, способствует его научному пониманию.

Применение компьютерных технологий не изменяет сроки обучения, а зачастую применение программно-педагогических средств (ППС) на уроке забирает больше времени, но дает возможность учителю более глубоко осветить тот или иной теоретический вопрос. При этом применение ППС помогает учащимся вникнуть более детально в физические процессы и явления, изучить важные теоретические вопросы, которые не могли бы быть изучены без использования интерактивных моделей.

Сметанников А.Л. [3] показал, что наибольшая эффективность применения компьютера на уроке достигается, как правило, в случаях использования объемных пакетов учебных программ, поддерживающих данные темы или разделы с печатными методическими разработками, системами контроля по различным предметам; программных сред, поддерживающих целые учебные курсы или значительные фрагменты курсов; эксперто-обучающих систем.

Использование современных телекоммуникационных технологий в учебном процессе может обеспечить передачу знаний и доступ к разнообразной учебной информации наравне, а иногда и более интенсивно и эффективнее, чем при традиционном обучении.

Несмотря на качественное улучшение учебного материала, введение инновационных подходов к обучению, а также массовое использование электронных материалов, не всем учащимся доступно стандартное обучение, что в значительной мере ухудшает успеваемость в школе. К числу учащихся, систематически не посещающих занятия в школе, относятся: находящиеся на домашнем обучении ввиду отсутствия из-за болезни; учащиеся в спортивных программах, что требует дополнительной подготовки с отрывом из учреждения образования.

Таким образом, количество учащихся, систематически не посещающих занятия по тем или иным предметам, может быть значительным.

Ещё одним фактором, ухудшающим усвоение учебного материала, является логическая связь между темами курса, поэтому, пропустив занятия и не поработав дома, ребёнок не способен сразу же влиться в образовательный процесс. Это является главной причиной потери интереса к предмету и дальнейшее его «забрасывание».

В связи с этим актуальным является проведение эксперимента по внедрению дистанционного обучения с использованием электронного учебника, направленного на разрешение противоречия между сложившейся в практике обучения ситуацией и требованиями, предъявляемыми к качеству образовательного процесса.

Понятие дистанционного обучения (Distance Education) заимствовано из английского языка и практики образования Канады и США и означает обучение на расстоянии, когда учитель и учащиеся разделены пространственно.

Под термином дистанционное обучение будем понимать процесс получения знаний и умений с помощью специализированной среды, основанной на использовании новейших информационных и телекоммуникационных технологий, обеспечивающих обмен учебной информацией на расстоянии.

Дистанционное обучение может обеспечиваться следующими способами: электронной почтой, телеконференциями, учебными форумами и чатами. Важнейшими современными направлениями развития дистанционного обучения являются размещение на специальных серверах учебных мультимедийных курсов, дистанционных уроков, в том числе интерактивных, анимаций по учебной тематике, научных поисковых машин для поиска учебной информации.

Исследователи рассматривали различные вопросы, затрагивающие методические и практические аспекты применения информационных и телекоммуникационных технологий в образовании. С одной стороны, это возможность вовлечения каждого учащегося в активный познавательный процесс, причем процесс не пассивного овладения знаниями, а активной познавательной самостоятельной деятельности каждого учащегося, применения им на практике этих знаний и четкого осознания, где, каким образом и для каких целей эти знания могут быть применены. С другой стороны – это возможность работать совместно, в сотрудничестве, при решении разнообразных проблем, проявляя при этом определенные коммуникативные умения, возможность широкого общения со сверстниками из других школ своего региона, других регионов страны и даже других стран мира, возможность свободного доступа к необходимой информации не только в информационных центрах своей школы, но и в научных, культурных, информационных центрах всего мира с целью формирования собственного независимого, но аргументированного мнения по той или иной проблеме, возможности ее всестороннего исследования.

Дистанционное обучение является перспективным способом получения образования изолированными сельскими учащимися, учащимися со специфическими требованиями или лицами, неспособными достичь поставленной цели другим способом.

Можно определить дистанционное образование как образование, характеризующееся пятью основными моментами: 1) существование обучающего и обучаемого и, как минимум, наличие договоренности между ними; 2) пространственная разделенность обучающего и обучаемого; 3) пространственная разделенность обучаемого и учебного заведения; 4) двунаправленное взаимодействие обучаемого и обучающего; 5) подбор материалов, как предусмотренных образовательным стандартом, так и предназначенных специально для дистанционного изучения.

Это определение охватывает ряд форм обучения – от основанных на печатных материалах, когда общение осуществляется по почте и телефону, до двусторонних видеокурсов, когда обучающий и обучаемый «встречаются» на телевизионных экранах [4].

Для обеспечения процесса дистанционного обучения используются наряду с традиционными информационными ресурсами следующие средства дистанционного обучения: электронные учебно-методические комплексы, включающие электронные учебники, тренировочные компьютерные программы; контрольно-тестирующие комплексы и иные материалы, предназначенные для передачи по телекоммуникационным каналам связи.

Кроме этого, дистанционная форма обучения используется как модель сетевого обучения для организации дифференциации обучения. С помощью дополнительного материала, который через сеть отправляется учащимся, и таким же способом организуется система проверки. Предусматриваются система тестирования и контроля, дополнительные практические работы, совместные проекты, исследовательские работы, которые неоднократно выставлялись учащимися на сайте исследовательских работ. Для поиска определенной информации по предметам предлагаю ссылки на информационные ресурсы [5].

Как показывают результаты ежегодного мониторинга, в школах, перешедших на работу по новым учебным планам, учитывающим введение дистанционного обучения, у учащихся повысилась мотивация к обучению и творческая активность. Это связано с тем, что в образовательном процессе, построенном на применении данной технологии, при сохранении всех основных форм учебных занятий (уроков, семинаров, консультаций, лабораторных и практических работ, зачетов), обучающий и обучаемый в основном контактируют только при проведении консультаций и лабораторных работ, поскольку лекции даются учащимся в текстовом виде в учебно-практических

пособиях (УПП). В УПП включены также вопросы для самоконтроля. Текстовая лекция, однако, имеет следующие преимущества. У учащегося есть возможность многократного обращения к непонятным при чтении местам, чередования чтения с обдумыванием, анализом. Кроме того, в тексте легче увидеть общую структуру содержания. Вопросы, остающиеся у слушателя после уяснения содержания текстового материала, как правило, более глубоки по постановке, принципиальны по сути, содержательны по форме, поскольку возникают в результате серьезной проработки материала и его осмысливания.

Взаимодействие учащихся с преподавателем строится на основе рассмотрения наиболее значимых и сложных вопросов, в ходе консультаций. К консультации учащийся уже накопил свои вопросы, которые возникли у него в ходе усвоения учебного материала и выполнения тестов для самоконтроля, поэтому функцией преподавателя становится индивидуальная консультация учащегося, преподаватель становится организатором, а учащийся – инициатором процесса обучения.

Постепенный переход к дистанционному обучению в общеобразовательной школе является одним из следствий перехода к профильному обучению, так как изучение курсов в рамках сетевой модели предполагает совмещение образовательных услуг, предоставляемых разными образовательными учреждениями, в том числе и территориально удаленными.

Таким образом, основными целями в реализации дистанционного обучения в школе являются: 1) повышение доступности образовательных услуг для обучающихся; 2) расширение сферы основной деятельности общеобразовательного учреждения; 3) интеграция дистанционного обучения с классическими формами обучения с целью повышения их эффективности.

Данные цели предположили реализацию следующих задач: 1) профессиональная подготовка и переподготовка кадров; 2) углубленное изучение темы, раздела из школьной программы или вне школьного курса; 3) реализация базового курса школьной программы для учащихся, не имеющих возможности по разным причинам посещать школу вообще или в течение какого-то отрезка времени; 4) подготовка школьников по отдельным учебным предметам к сдаче экзаменов; 5) ликвидация пробелов в знаниях, умениях, навыках школьников по определенным предметам школьного цикла; 6) дополнительное образование по интересам.

Дистанционное образование – это один из самых оптимальных выходов в сложившейся ситуации некачественного усвоения учебного материала. Именно такой способ обучения может помочь ребёнку не только не отставать от сверстников, но и развивать в себе творческие задатки, а также вырабатывать самостоятельность, усидчивость и трудолюбие.

#### Литература

1. Машбиц, Е.И. Психолого-педагогические проблемы компьютеризации обучения / Е.И. Машбиц. – М.: Педагогика, 1988. – 192 с.
2. Тихомиров, О.К. ЭВМ и новые проблемы психологии / О.К. Тихомиров, Л.Н. Бабанин. – М.: МГУ, 1986. – 203 с.
3. Панюкова, С.В. Концепция реализации личностно-ориентированного обучения при использовании информационных и коммуникационных технологий / С.В. Панюкова. – М.: Изд-во РАО, 1998. – 120 с.
4. Зуева, Е.С. Дистанционное обучение / Е.С. Зуева, А.А. Куприянова, С.В. Силаев // Тезисы докладов научно-методической конференции. – М.: Просвещение, 2002. – 168 с.
5. Дистанционное обучение // материалы научно-методической конференции [электронный ресурс]. – 2013. – Режим доступа: <http://podelise.ru/docs/26512/index-948.html?page=11>. – Дата доступа: 24.10.2013.

**Н. В. Гуцко, С. Р. Бондарь, Т. С. Герасименок**

### ПОСТРОЕНИЕ ВСЕГО МНОЖЕСТВА АВТОНОМНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ИМЕЮЩИХ ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ВИДЕ ОКРУЖНОСТИ

Пусть нам дана автономная система (1) второго порядка, содержащая в правой части многочлены третьей степени.

Провести качественное исследование системы (1) не представляется возможным уже по той причине, что нельзя найти особые точки этой системы в конечной части плоскости. Дополнительно предполагаем, что для многочленов  $P_1 + P_2, Q_1 + Q_2$  выполняется условие Гамильтона и точки  $(0,0), (\pm 1,0), (0, \pm 1)$  являются особыми.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \equiv \\ \quad \equiv P \equiv P_1(x, y) + P_2(x, y) + P_3(x, y) \equiv P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \equiv \\ \quad \equiv Q \equiv Q_1(x, y) + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) \equiv Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Найдем условия на коэффициенты системы (17), чтобы выполнялись выше указанные условия.

1) Условие, чтобы точки  $(0,0), (\pm 1,0), (0,\pm 1)$  были особыми точками системы (17).

Подставив точки  $(\pm 1,0)$  в систему (1), получим:

$$\begin{cases} a_{10} + a_{20} + a_{30} = 0 \\ b_{10} + b_{20} + b_{30} = 0 \\ -a_{10} + a_{20} - a_{30} = 0 \\ -b_{10} + b_{20} - b_{30} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Подставив точки  $(0,\pm 1)$  в систему (1), получим:

$$\begin{cases} a_{01} + a_{02} + a_{03} = 0 \\ b_{01} + b_{02} + b_{03} = 0 \\ -a_{01} + a_{02} - a_{03} = 0 \\ -b_{01} + b_{02} - b_{03} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Решая системы (2) и (3), находим, что:  $a_{20} = 0, b_{20} = 0, a_{02} = 0,$

$$b_{02} = 0, a_{30} = -a_{10}, b_{30} = -b_{10}, a_{03} = -a_{01}, b_{03} = -b_{01}.$$

Тогда получим систему (4):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy - a_{10}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 - a_{01}y^3 \equiv 0 \\ \frac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{01}y + b_{11}xy - b_{10}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 - b_{01}y^3 \equiv 0 \end{cases}$$

2) Условие Гамильтона, т. е.  $\frac{\partial(P_1+P_2)}{\partial x} + \frac{\partial(Q_1+Q_2)}{\partial y} = 0.$

В нашем случае из системы (4) выписываем:

$$P_1 + P_2 = a_{11}xy + a_{10}x + a_{01}y, Q_1 + Q_2 = b_{11}xy + b_{10}x + b_{01}y.$$

Находим производные и записываем равенство:

$$a_{11}y + a_{10} + b_{01} + b_{11}x = 0.$$

Отсюда следует, что  $b_{01} = -a_{10}, a_{11} = 0, b_{11} = 0.$

В результате система (4) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{10}x + a_{01}y - a_{10}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 - a_{01}y^3 \equiv 0 \\ \frac{dy}{dt} = b_{10}x - a_{10}y - b_{10}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + a_{10}y^3 \equiv 0 \end{cases} \quad (5)$$

3) Необходимо найти множество систем вида (5), для которых окружность  $\omega(x, y) = x^2 + y^2 - r^2, r \neq 1$  является частным интегралом.

Для того чтобы построить данное множество систем, необходимо записать следующее тождество [1]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial \omega}{\partial y} Q(x, y) = \omega(x, y) \cdot F(x, y),$$

где  $F(x, y)$  – многочлен  $(n-1)$  – степени, т. е.  $F(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$ . Находим производные  $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 2x, \frac{\partial \omega}{\partial y} = 2y$ , и записываем тождество:

$$2x(a_{10}x + a_{01}y - a_{10}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 - a_{01}y^3) + 2y(b_{10}x - a_{10}y - b_{10}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + a_{10}y^3) = (x^2 + y^2 - r^2)(a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях и решив полученную систему, находим, что:  $a_{10} = 0$ ,  $b_{21} = -a_{12}$ ,

$$a_{21} = -\frac{1}{r^2}(a_{01} + (1-r^2)b_{10}), b_{12} = -\frac{1}{r^2}((1-r^2)a_{01} + b_{10}),$$

$$\lambda_{11} = -\frac{2}{r^2}(a_{01} + b_{10}), \text{ где } a_{01} + b_{10} \neq 0$$

В результате получаем множество систем вида (5), для которых окружность  $\omega(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$  является частным интегралом:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{01}y - \frac{1}{r^2}(a_{01} + (1-r^2)b_{10})x^2y + a_{12}xy^2 - a_{01}y^3 \equiv 0 \\ \frac{dy}{dt} = b_{10}x - b_{10}x^3 - a_{12}x^2y - \frac{1}{r^2}((1-r^2)a_{01} + b_{10})xy^2 \equiv 0 \end{cases} \quad (6)$$

**Теорема.** Для того чтобы для системы (1) выполнялись следующие условия:

- 1      окружность  $\omega(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$  является частным интегралом системы (1);
- 2      точки  $(0,0), (\pm 1,0), (0,\pm 1)$  – особые точки системы (1);
- 3       $\frac{\partial(P_1+P_2)}{\partial x} + \frac{\partial(Q_1+Q_2)}{\partial y} = 0$ ;

необходимо и достаточно, чтобы система (1) имела вид (6).

Далее исследование системы (6) будем проводить, считая, что  $a_{01} \neq 0$  и  $b_{10} \neq 0$ .

В противном случае оси  $OX$  и  $OY$  будут особыми линиями системы (6).

Фазовую плоскость  $XOY$  дополним бесконечно удаленными точками. Будем выяснять поведение траекторий системы на бесконечности. В случае, когда правые части динамической системы – многочлены, то используется отображение фазовой плоскости на так называемую «сферу Пуанкаре», т. е. на сферу радиуса единица, касающуюся плоскости  $XOY$  в начале координат. Интегральные кривые плоскости перейдут при этом в соответственные кривые сферы, причем седла, узлы и фокусы сохраняют тот же вид [2].

Для выяснения этого вопроса Пуанкаре ввел преобразования, которые получили название «преобразования Пуанкаре».

Преобразования Пуанкаре позволяют бесконечно удаленные точки переводить в конечные, которые в дальнейшем исследуются. Они имеют следующий вид

$$x = \frac{1}{z}, y = \frac{u}{z} \quad (7)$$

для исследования бесконечно удаленных точек, не лежащих на «концах»  $OY$  и

$$x = \frac{v}{z}, y = \frac{1}{z} \quad (8)$$

для исследования бесконечно удаленных точек, лежащих на «концах».

Теперь к системе:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (9)$$

применяем последовательно преобразования Пуанкаре (7) и (8) и получим соответственно системы:

$$\frac{du}{dt} = -UzP\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) + zQ\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right), \frac{dz}{dt} = -z^2P\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) \quad (10)$$

$$\frac{dv}{dt} = zP\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right) - VzQ\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right), \frac{dz}{dt} = -z^2Q\left(\frac{v}{z}, \frac{1}{z}\right). \quad (11)$$

Так как в правой части системы (9) стоят многочлены степени  $n$ , то полученные системы (10) и (11) можно записать в виде:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\bar{P}(U, z)}{z^{n-1}}, \frac{dz}{dt} = \frac{\bar{Q}(U, z)}{z^{n-1}},$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\bar{P}(V, z)}{z^{n-1}}, \frac{dz}{dt} = \frac{\bar{Q}(V, z)}{z^{n-1}}.$$

Делаем замену времени  $\frac{dt}{z^{n-1}} \rightarrow dt$  и окончательно получаем

$$\frac{dU}{dt} = \bar{P}(U, z), \frac{dz}{dt} = \bar{Q}(U, z) \quad (12)$$

$$\frac{dV}{dt} = \bar{P}(V, z), \frac{dz}{dt} = \bar{Q}(V, z) \quad (13)$$

для системы (12) находятся особые точки вида  $(U, 0)$ . Для этого полагают в правых частях системы (12)  $z = 0$  и приравнивают их к нулю. В результате получают уравнение для отыскания координаты  $U$  особых точек  $(U, 0)$ . А затем данные точки исследуются, как и в конечной части плоскости.

Чтобы исследовать поведение траекторий системы (9) на «концах»  $OY$ , в системе (13) полагают  $V = z = 0$ . Если правые части системы (13) обращаются в нуль, то точка  $(0; 0)$  является особой точкой и ее исследуют, как в конечной части плоскости. Если правые части системы (13) не обращаются в нуль, то точка  $(0; 0)$  не является особой точкой.

К системе (1) будем применять преобразования Пуанкаре (7). В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \frac{1}{z^2} \left( b_{10}z^2 - b_{10} - a_{12}U - \frac{1}{r^2}((1-r^2)a_{01} + b_{10})U^2 - a_{01}U^2z^2 + \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{r^2}(a_{01} + (1-r^2)b_{10})U^2 - a_{12}U^3 + a_{01}U^4 \right) \\ \frac{dz}{dt} = \frac{1}{z^2} \left( -a_{01}z^3U + \frac{1}{r^2}(a_{01} + (1-r^2)b_{10})Uz - a_{12}U^2z + a_{01}U^3z \right) \end{cases}$$

Сделаем замену времени  $\frac{dt}{z^2} \rightarrow dt$  и получим систему (14):

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = b_{10}z^2 - b_{10} - a_{12}U - \frac{1}{r^2}((1-r^2)a_{01} + b_{10})U^2 - a_{01}U^2z^2 + \\ \quad + \frac{1}{r^2}(a_{01} + (1-r^2)b_{10})U^2 - a_{12}U^3 + a_{01}U^4 \equiv \bar{P}(U, z) \\ \frac{dz}{dt} = -a_{01}z^3U + \frac{1}{r^2}(a_{01} + (1-r^2)b_{10})Uz - a_{12}U^2z + a_{01}U^3z \equiv \bar{Q}(U, z) \end{cases}$$

Находим особые точки вида  $(U, 0)$ :

$$\begin{cases} -b_{10} - a_{12}U - \frac{1}{r^2}((1-r^2)a_{01} + b_{10})U^2 + \\ + \frac{1}{r^2}(a_{01} + (1-r^2)b_{10})U^2 - a_{12}U^3 + a_{01}U^4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

$$-b_{10} - a_{12}U - \frac{1}{r^2}((1-r^2)a_{01} + b_{10})U^2 + \frac{1}{r^2}(a_{01} + (1-r^2)b_{10})U^2 - a_{12}U^3 + a_{01}U^4 = 0$$

$$-b_{10} - a_{12}U + a_{01}U^2 - b_{10}U^2 - a_{12}U^3 + a_{01}U^4 = 0,$$

$$(1 + U^2)(-b_{10} + a_{01}U^2 - a_{12}U) = 0,$$

$$U_{1,2} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 + 4a_{01}b_{10}}}{2a_{01}}$$

Имеем особые точки вида  $(U_{1,2}, 0)$ , если  $a_{01} \neq 0$ . Теперь к системе (1) будем применять преобразования Пуанкаре (8). В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{z^2} \left( b_{10} z^2 - \frac{1}{r^2} (a_{01} + (1 - r^2)b_{10}) V^2 + a_{12} V - a_{01} - b_{10} V^2 z^2 + \right. \\ \quad \left. + b_{10} V^4 + a_{12} V^3 + \frac{1}{r^2} ((1 - r^2)a_{01} + b_{10}) V^2 \right) \\ \frac{dz}{dt} = \frac{1}{z^2} \left( b_{10} z^3 V + \frac{1}{r^2} (a_{01} + (1 - r^2)b_{10}) U z - a_{12} U^2 z + a_{01} U^3 z \right) \end{cases}$$

Сделаем замену времени  $\frac{dt}{z^2} \rightarrow dt$  и получим систему:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = b_{10} z^2 - \frac{1}{r^2} (a_{01} + (1 - r^2)b_{10}) V^2 + a_{12} V - a_{01} - b_{10} V^2 z^2 + b_{10} V^4 + a_{12} V^3 + \\ \quad + \frac{1}{r^2} ((1 - r^2)a_{01} + b_{10}) V^2 \equiv \bar{P}(V, z) \\ \frac{dz}{dt} = b_{10} z^3 V + \frac{1}{r^2} (a_{01} + (1 - r^2)b_{10}) U z - a_{12} U^2 z + a_{01} U^3 z \equiv \bar{Q}(V, z) \end{cases}$$

Теперь полагаем  $V = z = 0$ . Получаем, что  $a_{01} = 0$ , но так как  $a_{01} \neq 0$  (по ранее введенным предположениям), то «концы» оси ОY не являются особой точкой. В результате имеем в бесконечной части плоскости особые точки  $(U_{1,2}, 0)$ .

Дальнейшее исследование системы (14) проводить при условии, что  $a_{12} = 0$ .

Чтобы выяснить характер особых точек системы (14), необходимо составить характеристическое уравнение в виде:

$$\begin{vmatrix} P'_U(U_{1,2}, 0) - \lambda_\infty & P'_z(U_{1,2}, 0) \\ Q'_U(U_{1,2}, 0) & Q'_z(U_{1,2}, 0) - \lambda_\infty \end{vmatrix} = 0$$

Найдем частные производные:

$$P'_U(U_{1,2}, 0) = 4a_{01}U^3 + 2U(a_{01} - b_{10})$$

$$P'_z(U_{1,2}, 0) = 0$$

$$Q'_U(U_{1,2}, 0) = 0$$

$$Q'_z(U_{1,2}, 0) = \frac{1}{z^2} (a_{01} + b_{10}) U$$

Составим характеристическое уравнение и найдем характеристические числа в общем виде, а потом выполним подстановку:

$$\begin{vmatrix} P'_U(U_{1,2}, 0) - \lambda_\infty & 0 \\ 0 & Q'_z(U_{1,2}, 0) - \lambda_\infty \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Или } (P'_U(U_{1,2}, 0) - \lambda_\infty)(Q'_z(U_{1,2}, 0) - \lambda_\infty) = 0.$$

Тогда  $\lambda_{1\infty} = P'_U(U_{1,2}, 0)$ ,  $\lambda_{2\infty} = Q'_z(U_{1,2}, 0)$ . Окончательно,

$$\lambda_{1\infty} = 4a_{01}U^3 + 2U(a_{01} - b_{10}) \text{ и } \lambda_{2\infty} = \frac{1}{z^2} (a_{01} + b_{10}) U.$$

Мы нашли характеристические числа особых точек  $(U_{1,2}, 0)$ . Система (8) имеет следующие особые точки:

$$U_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{b_{10}}{a_{01}}}, \text{ если } \frac{b_{10}}{a_{01}} > 0.$$

Если же  $\frac{b_{10}}{a_{01}} < 0$ , то особых точек в бесконечности нет.

В зависимости от того, какое значение будут принимать выражения в характеристических числах ( $U = \text{const}$ ), особые точки вида  $(U_{1,2}, 0)$  могут быть:

- узлами, если выражения оба отрицательны или оба положительны;
- четырехсепаратрисными седлами, если выражения разных знаков.

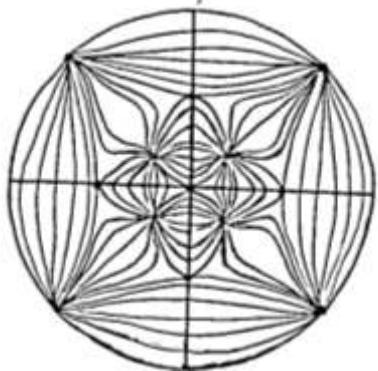
Мы нашли характеристические числа всех особых точек системы (6), поэтому можем выяснить характер этих точек, проведя анализ в зависимости от того, каким может быть подкоренное выражение в характеристических числах.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2(2-r^2)\sqrt{a_{01}b_{10}} \pm \sqrt{4r^4a_{01}b_{10}}}{2} = \frac{(-4+2r^2 \pm 2r^2)\sqrt{a_{01}b_{10}}}{2}$$

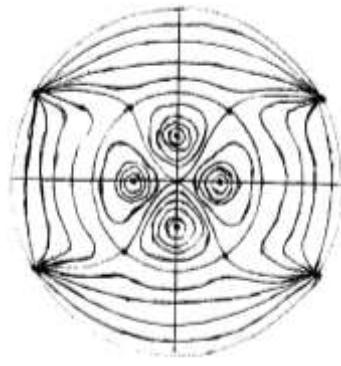
$$\lambda_1 = -2(1-r^2)\sqrt{a_{01}b_{10}}, \lambda_2 = -2\sqrt{a_{01}b_{10}}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2(2-r^2)\sqrt{a_{01}b_{10}} \pm \sqrt{4r^4a_{01}b_{10}}}{2} = \frac{(4-2r^2 \pm 2r^2)\sqrt{a_{01}b_{10}}}{2}$$

$$\lambda_1 = 2\sqrt{a_{01}b_{10}}, \lambda_2 = 2(1-r^2)\sqrt{a_{01}b_{10}}.$$



**Рисунок 1 – Картина поведения траекторий системы в круге Пуанкаре, если  $0 < r < 1$**



**Рисунок 2 – Картина поведения траекторий системы в круге Пуанкаре, если  $r > 1$**

Таким образом, в ходе качественного исследования автономной дифференциальной системы вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \\ \frac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \end{cases}$$

были получены следующие результаты:

- найдены необходимые и достаточные условия, налагаемые на коэффициенты системы, чтобы окружность  $\omega(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$
- была частным интегралом системы;
- выяснен характер особых точек системы в конечной и бесконечной частях плоскости;
- построены качественные картины поведения траекторий системы в круге Пуанкаре.

Исходная система может быть исследована и при других предположениях. Все полученные результаты данной работы могут быть использованы как в теоретических, так и в практических исследованиях при изучении качественного исследования дифференциальных уравнений.

#### Литература

- Еругин, Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую / Н.П. Еругин // ПММ. – 1952. – Т. 16, Вып. 6. – С. 659–670.
- Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонович. – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1976.

**Н. В. Гуцко, Ю. В. Горбатова**

#### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ, ВОСХОДЯЩИХ К КЛАССИЧЕСКИМ РЕЗУЛЬТАТАМ ХУППЕРТА, АГРАВАЛИЯ И АСААДА

На протяжении многих лет развития теории конечных групп авторы обращались к вопросу влияния свойств  $i$ -ых максимальных подгрупп (при фиксированном  $i$ ) на строение группы, что привело к появлению большого числа публикаций в направлении развития теории обобщенно максимальных подгрупп конечных групп. В настоящее время теория обобщенно максимальных подгрупп является весьма развитым учением, обогащенным большим числом

глубоких теорем и содержательных примеров. Вместе с тем имеется и ряд открытых задач в данном направлении. Решение части из них приводится в данной работе.

Напомним, что подгруппа  $H$  группы  $G$  называется *2-максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы  $G$ , если  $H$  является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе  $M$  группы  $G$ . Аналогично могут быть определены 3-максимальные, 4-максимальные и далее подгруппы.

Легко заметить, что в несверхразрешимых группах одна и та же подгруппа может быть  $n$ -максимальной и  $m$ -максимальной одновременно для  $n \neq m$ . В связи с этим назовём подгруппу  $H$  группы  $G$  *строго n-максимальной подгруппой* в  $G$ , если  $H$  является  $n$ -максимальной подгруппой в  $G$ , но не является  $n$ -максимальной подгруппой в любой собственной подгруппе группы  $G$ . Например, в группе  $SL(2,3)$  единственная подгруппа порядка 2 является 2-максимальной подгруппой, но не является строго 2-максимальной подгруппой.

Связь между 2-максимальными подгруппами группы  $G$  и структурой группы  $G$  исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранние результаты в данном направлении получили Редеи [1], описавший неразрешимые группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами, и Хупперт [2], установивший сверхразрешимость группы, в которой все вторые максимальные подгруппы нормальны. Эти результаты стимулировали многие другие исследования в данном направлении. Например, в работах Судзуки [3] и Янко [4] содержится описание конечных неразрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны. Описание разрешимых групп, в которых все вторые максимальные подгруппы являются нильпотентными, было получено В.А. Белоноговым в [5].

Отмеченные выше результаты Редеи и Хуппера получили свое дальнейшее развитие в работе Агравала [6], где доказано, что группа  $G$  является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы  $S$ -квазинормальны (подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $S$ -квазинормальной в  $G$ , если  $H$  перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы  $G$ ), а также в работе Л.Я. Полякова [7], который доказал, что группа является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми ее максимальными подгруппами. В дальнейшем в работе [8] было получено полное описание групп, у которых каждая вторая максимальная подгруппа перестановочна со всеми первыми максимальными подгруппами.

Вместе с тем следует отметить следующие продолжительное время открытые вопросы в данном направлении.

**I. Каково точное строение групп, в которых каждая (строго) 2-максимальная подгруппа  $S$ -квазинормальна?**

**II. Каково точное строение ненильпотентных групп, в которых каждая (строго) 2-максимальная подгруппа нормальна?**

Следующая лемма является ответом на вопросы I и II. С доказательством леммы можно ознакомиться в работе [9, теорема 2.1] или на сайте журнала, в котором опубликована работа.

**Лемма 1.** Пусть  $G$  – ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1)  $G$  является сверхразрешимой группой Шмидта;
- (2) каждая 2-максимальная подгруппа группы  $G$  нормальна;
- (3) каждая строго 2-максимальная подгруппа группы  $G$   $S$ -квазинормальна;
- (4) каждая строго 2-максимальная подгруппа группы  $G$  нормальна;
- (5) каждая 2-максимальная подгруппа группы  $G$   $S$ -квазинормальна.

В дальнейшем  $p$ ,  $q$  и  $r$  – простые (необязательно различные) числа.

На протяжении многих лет развития теории конечных групп авторы обращались к вопросу влияния свойств третьих максимальных подгрупп на строение группы. Следует отметить, что толчком этих исследований послужила упомянутая нами выше работа Хуппера [2], где было доказано, что в случае, когда каждая третья максимальная подгруппа группы  $G$  является нормальной в  $G$ , коммутант  $G'$  группы  $G$  нильпотент и порядок каждого главного фактора группы  $G$  делится не более чем на два простых числа. Этот результат получил развитие во многих работах, в частности, в работе [10] было уточнено строение группы с нормальными третьими максимальными подгруппами. Вместе с тем публикация [11] естественным образом породила следующий открытый вопрос.

**III. Каково точное строение ненильпотентных групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа нормальна?**

Строение ненильпотентных групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа нормальна, описывает теорема 1 [12].

**Теорема 1.** Пусть  $G$  – ненильпотентная группа. Тогда каждая 3-максимальная подгруппа группы  $G$  является нормальной в  $G$  в том и только в том случае, когда либо  $|G|=p^\alpha q^\beta r^\gamma$ ,  $\alpha+\beta+\gamma \leq 3$ , либо  $G$  изоморфна  $SL(2,3)$ , либо  $G$  является сверхразрешимой группой одного из следующих типов:

- (1)  $G$  – группа Шмидта;
- (2)  $G = [P]Q$ , где  $|P|=p$ ,  $|Q|=q^\beta$  ( $\beta \geq 3$ ); группа  $Q$  либо циклическая, либо является абелевой группой типа  $(q^{\beta-1}, q)$ , либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, либо изоморфна группе  $M_\beta(q)$  ( $\beta > 4$ );  $C_Q(P)=\Omega_{\beta-2}(Q)$ ;
- (3)  $G = [P]Q$ , где  $P$  – циклическая группа порядка  $p^2$ , обе группы  $\Phi(P)Q$  и  $G/\Phi(P)$  являются группами Шмидта, и максимальная подгруппа из  $Q$  совпадает с  $Z(G)$ ;
- (4)  $G = [P_1 \times P_2]Q$ , где  $|P_1|=|P_2|=p$ ,  $P_1Q$  – группа Шмидта и группа  $P_2Q$  либо нильпотента, либо также является группой Шмидта;
- (5)  $G = ([P]Q)R$ , где  $P$  и  $R$  – минимальные нормальные подгруппы группы  $G$ ,  $|P|=p$ ,  $|R|=r$ ,  $Q$  – циклическая группа и  $F(G)=PR\Phi(Q)$ .

В теореме 1 и в следующих теоремах  $P$ ,  $Q$  и  $R$  обозначают некоторые силовскую  $p$ -подгруппу, силовскую  $q$ -подгруппу и силовскую  $r$ -подгруппу группы  $G$ . Через  $M_\beta(q)$  обозначается  $q$ -группа  $\langle a, b \mid a^{q^{\beta-1}}=b^q=1, a^b=a^{(1+q)^{\beta-2}} \rangle$ , где  $\beta > 2$ , и  $\beta > 3$  при  $q=2$  (см. [13, с. 190]).

Отметим еще один интересный результат в уже упомянутой ранее работе [8], в которой авторы получили полное описание групп, каждая вторая максимальная подгруппа которых перестановочна со всеми максимальными подгруппами. Базируясь на этом результате, в работе [14] В. Го, Е.В. Легчекова и А.Н. Скиба получили полное описание ненильпотентных групп, в которых каждая вторая максимальная подгруппа перестановочна со всеми третьими максимальными подгруппами.

Кроме того, в этой же публикации была доказана разрешимость группы, каждая третья максимальная подгруппа которой  $X$ -перестановочна со всеми вторыми максимальными подгруппами, где  $X$  – подгруппа Фиттинга.

В связи с приведенными результатами следует упомянуть следующие открытые вопросы в данном направлении.

**Задача 1** (Монахов В.С, Тавгень О.И. [15, вопрос 3.10]). Каково точное строение групп, в которых любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны?

**IV. Каково точное строение групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа  $S$ -квазинормальна?**

Ответ на вопрос IV приводится в следующей теореме о строении групп, у которых все трети максимальные подгруппы  $S$ -квазинормальны [16].

**Теорема 2.** В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа группы  $G$  является  $S$ -квазинормальной в  $G$ , когда группа  $G$  либо нильпотента, либо  $|G|=p^\alpha q^\beta r^\gamma$ , где  $\alpha+\beta+\gamma \leq 3$ , либо  $G$  изоморфна  $SL(2,3)$ , либо  $G$  является сверхразрешимой группой одного из следующих типов:

- (1)  $G$  – группа Шмидта;
- (2)  $G=[P]Q$ , где  $|P|=p$ ,  $|Q|=q^\beta$  ( $\beta \leq 3$ ); группа  $Q$  либо циклическая, либо является абелевой группой типа  $(q^{\beta-1}, q)$ , либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, либо изоморфна группе  $M_\beta(q)$ ;  $C_Q(P)=\Omega_{\beta-2}(Q)$ ;
- (3)  $G=[P]Q$ , где  $P$  – циклическая группа порядка  $p^2$ , обе группы  $\Phi(P)Q$  и  $G/\Phi(P)$  являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из  $Q$  совпадает с  $Z(G)$ ;
- (4)  $G=[P_1 \times P_2]Q$ , где  $|P_1|=|P_2|=p$ ,  $P_1Q$  – группа Шмидта и группа  $P_2Q$  либо нильпотента, либо также является группой Шмидта;
- (5)  $G=([P]Q)R$ , где  $P$  и  $R$  – минимальные нормальные подгруппы группы  $G$ ,  $|P|=p$ ,  $|R|=r$ ,  $Q$  – циклическая группа и  $F(G)=PR\Phi(Q)$ .

Анализ работ, связанных с изучением влияния свойств  $n$ -максимальных подгрупп ( $n < 4$ ) на строение группы, следует начать с публикации Янко [17], посвященной обобщению результатов Хуппера [2] о группах со вторыми или третьими максимальными подгруппами. Янко в своей работе рассматривает группы, в которых каждая четвертая максимальная подгруппа является нормальной, и доказывает, в частности, что группа  $SL(2,5)$  является единственной неразрешимой и непростой группой с таким свойством. В этой же работе было показано, что

неабелевы простые группы, у которых длины цепей максимальных подгрупп не превышают четырех, изоморфны группе  $\text{LF}(2, p)$  для некоторого простого  $p$ .

Годом позже в работе [18] Янко обобщает этот результат и доказывает, что неабелевы простые группы, у которых длины цепей максимальных подгрупп не превышают пяти, изоморфны группе  $\text{SLF}(2, q)$ , где  $q$  – степень некоторого простого числа.

В данном направлении нами был получен ответ на следующий открытый вопрос.

*V. Каково точное строение групп Шмидта с обобщенно перестановочными первыми и четвертыми максимальными подгруппами?*

Ответ на вопрос V о строении групп Шмидта с обобщенно перестановочными первыми и четвертыми максимальными подгруппами сформирован в теореме 3 [19].

**Теорема 3.** Пусть  $G=[P]Q$  – группа Шмидта, где  $P$  и  $Q$  – силовские  $p$ -подгруппа и  $q$ -подгруппа группы  $G$  соответственно. В том и только в том случае в группе  $G$  каждая максимальная подгруппа  $F(G)$ -перестановочна со всеми 4-максимальными подгруппами из  $G$ , когда либо  $|G|=p^{\alpha}q^{\beta}$  для  $\alpha+\beta\leq 4$ , либо  $G$  является группой одного из следующих типов:

- (1)  $G$  – сверхразрешимая группа Шмидта;
- (2)  $G=[P]Q$ , где  $|Q|=q^2$ ,  $|\Phi(P)|\leq p^2$  и  $\Phi(P)$  – единственная 2-максимальная подгруппа в  $P$ ;
- $G=[P]Q$ , где  $|Q|=q$ ,  $|\Phi(P)|\leq p^2$  и  $P_3\subseteq\Phi(P)$  для каждой 3-максимальной подгруппы  $P_3$  из  $P$ .

Таким образом, проведенный обзор литературы по теории  $n$ -максимальных подгрупп и полученные результаты в данном направлении показывают, что строение конечной группы тесно связано со свойствами ее  $i$ -ых максимальных подгрупп (при фиксированном  $i$ ) и изучение группы по свойствам ее  $i$ -ых максимальных подгрупп является эффективным инструментом к анализу общей проблемы классификации групп по заданным свойствам ее подгрупп.

### Литература

1. R`edei, L. Ein Satz über die endlichen einfachen Gruppen / L. R`edei // Acta Math. – 1950. – Т. 84. – С. 129–153.
2. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
3. Suzuki, M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, N 4. – P. 686–695.
4. Janko, Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424.
5. Белоногов, В.А. Конечные разрешимые группы сnilпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Мат. заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.
6. Agrawal, R.K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 13–21.
7. Поляков, Л.Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л.Я. Поляков // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 75–88.
8. Легчекова, Е.В. Конечные группы с частично перестановочными вторыми и третьими максимальными подгруппами / Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 3. – С. 27–29.
9. Луценко, Ю.В. Конечные ненильпотентные группы с нормальными или  $S$ -квазинормальными  $n$ -максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Известия Гомельского университета им. Ф. Скорины. – 2009. – № 1 (52). – С. 134–138.
10. Wang, K.-r. Finite Groups Whose 3-maximal Subgroups are Normal / K.-r. Wang // Journal-Sichuan normal university natural science. – 2003. – Vol. 26, part 1. – P. 6–9.
11. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
12. Гуцко, Н.В. Обобщенно квазинормальные подгруппы в теории конечных групп / Н.В. Гуцко, Ю.В. Луценко. – Мозырь: УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2011. – 216 с.
13. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. – New York-Evanston-London: Harper and Row, 1968.
14. Guo, W. The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekowa, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2009. – № 37. – С. 2446–2456.
15. Skiba, A.N. Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N. Skiba // Извес. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 3 (36). – С. 12–32.
16. Гуцко, Н.В. Строение групп Шмидта с обобщенно перестановочными первыми, вторыми и четвертыми максимальными подгруппами / Н.В. Гуцко, Ю.В. Луценко // Вестник ПГУ, серия С фунд. наук. – 2011. – № 12. – С. 67–72.

17. Janko, Z. Finite groups with invariant fourth maximal subgroups / Z. Janko // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 82–89.
18. Janko, Z. Finite simple groups with short chains of subgroups / Z. Janko // Math. Z. – 1964. – Vol. 84. – P. 428–437.
19. Гуцко, Н.В. Конечные группы с обобщенно квазинормальными  $n$ -максимальными подгруппами / Н.В. Гуцко, Ю.В. Луценко // Молодежь в науке – 2012: прил. к журн. «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі»: В 5 ч. – Ч 3. Серия физико-математических наук / Нац. Акад. наук Беларуси. Совет молодых ученых НАН Беларуси; редкол. С.В. Абламейко (гл. ред.), С.Я. Килин [и др.]. – Минск: Беларус. навука, 2013. – С. 12–14.

**Н. В. Гуцко, С. В. Игнатович**

### **К ВОПРОСУ ИЗУЧЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

Для математических исследований окружающей нас действительности важными в силу их широкого использования в описаниях различных процессов являются следующие понятия: предел числовой последовательности, предел функции на бесконечности, предел функции в точке, дифференцирование и дифференциал функции. При изучении этих понятий в курсе высшей математики у многих студентов возникают трудности различного характера.

В процессе вычисления пределов допускается масса ошибок, которые обусловлены как слабой школьной математической подготовкой студентов, так и их низким уровнем знаний материала высшей математики. Большая часть ошибок допускается из-за незнания формул и правил, (особенно из-за незнания формул сокращенного умножения). Очень многие ошибки допускаются также из-за неумения самостоятельно применять знания на практике, из-за неточного использования алгоритмов решения задачи. Зачастую студенты пренебрегают проверкой наличия в данном пределе той или иной неопределенности, формально используют замены эквивалентных бесконечно малых функций между собой. Также большое число ошибок допускается из-за невнимательности и поспешности принятия решения (см. таблицу).

Приведем примеры некоторых часто встречающихся ошибок, которые допускают студенты при решении пределов, а также отметим причины этих ошибок.

Таблица – Анализ встречающихся ошибок, которые допускают студенты при решении пределов

<b>№</b>	<b>Задания</b>	<b>Ошибки</b>	<b>Причина ошибок</b>
1	Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$	$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - x^2)(x - 1)}{(x^3 + x^2)(x - 1)} \end{aligned}$	Низкий уровень умений разлагать на множители многочлены способом группировки
2	Найти $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 1}$	$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)}{(x + 1)} \end{aligned}$	Неверное разложение квадратного трехчлена на множители, т. е. неправильно использована формула $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
3	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 3}{5x - 1}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 3}{5x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + 3/x}{5 - 1/x}$	Низкий уровень умений выполнять действия с дробями, в частности, неумение сокращать дроби
4	Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x^2 - 9} - \frac{6}{x - 3} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x^2 - 9} - \frac{6}{x - 3} \right) =$	Низкий уровень умений выполнять арифметические действия с дробями, в частности, неверное сложение дробей.

<i>№</i>	<i>Задания</i>	<i>Ошибки</i>	<i>Причина ошибок</i>
		$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{(x-3)(x+3)} - \frac{6(x+3)}{(x-3)(x+3)} \right)$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-6x+18}{(x-3)(x+3)}$	Низкий уровень умений выполнять раскрытие скобок, если перед скобками стоит знак «минус»
5	Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{x(x-3)}$	Неверное применение формулы сокращенного умножения $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
6	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^8 - 12} - 3}{4 + 5x^4}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^8 - 12} - 3}{4 + 5x^4}$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^8 - 12} - 3)(\sqrt{x^8 - 12} + 3)}{(4 + 5x^4)(\sqrt{x^8 - 12} + 3)}$	Неверно выбран метод избавления от неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$
7	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{x+3} \right)^x$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{x+3} \right)^x$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3+x-2}{x+3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x-2}{x+3} \right)^x$	Использование второго замечательного предела без проверки наличия неопределенности вида $1^\infty$
8	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x+4-4} = \lim_{x \rightarrow 0} x$	1. Возведение числителя и знаменателя в квадрат. 2. Неверное применение формулы сокращенного умножения $(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
9	Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$ $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x - \cos x}{\pi - 4x}$	1. Отсутствие проверки того факта, являются ли функций $x$ и $\sin x$ бесконечно малыми при $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ . 2. Неправильное использование замены эквивалентных бесконечно малых функций
10	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + \sqrt[3]{1-x^3} \right)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + \sqrt[3]{1-x^3} \right) = \infty + \infty = \infty$	Невнимательность при проверке наличия неопределенности

Для того, чтобы уменьшить число математических ошибок, как показывает накопленный педагогический опыт, необходимо в процессе обучения математике систематически добиваться от студентов глубокого и прочного усвоения математической теории и алгоритмов решения типовых задач, осуществлять регулярный контроль и учет знаний. Необходимо прослеживать на занятиях связь теории с практикой для повышения интереса студентов к изучаемому материалу. Полезно также периодически повторять и закреплять ранее пройденный учебный материал при изучении соответствующих новых тем.

В курсе математики при решении целого ряда задач возникает необходимость находить производную той или иной функции. Однако, как показывает анализ контрольных срезов,

многие из первокурсников не знают не только простейших формул и стандартных методов дифференцирования, но и иногда, производя те или иные выкладки, не совсем точно понимают смысл своих действий. Это приводит к большому числу ошибок в решениях задач на нахождение производной функции и на приложения производной. Такая же проблема характерна и для некоторых студентов старших курсов. Одну из причин этого мы видим в том, что в настоящее время данная тема, согласно школьной учебной программе [1], рассматривается учителем в том объеме, который он считает целесообразным.

Анкетирования, тестирования, самостоятельные и контрольные работы, индивидуальные семестровые задания, коллоквиумы, результаты зачетов и экзаменов дали возможность выявить следующие основные ошибки студентов, возникающие при изучении вопросов дифференцируемости функции одной действительной переменной.

Пример 1. Продифференцировать функцию

$$y(x) = 3x^2 - \frac{5}{x} + 3\sqrt[6]{x^4}.$$

При решении данного примера большинство первокурсников рассматривают второе слагаемое как дробь и берут производную по правилу дифференцирования дроби, что является довольно не рациональным подходом. Студенты не замечают, что константу  $-5$  можно вынести за знак производной, а затем взять производную только от степенной функции  $x^{-1}$ .

Что касается третьего слагаемого, то студенты не учитывают, что здесь необходимо иметь в виду тот факт, что функция с рациональным показателем определяется лишь на положительной полуоси, поэтому данная функция и ее производная при доопределении на отрицательную полуось нуждается в дополнительных пояснениях.

В данном случае при  $x < 0$  имеем

$$(3\sqrt[6]{x^4})' = (3\sqrt[6]{(-x)^4})' = (3(-x)^{\frac{2}{3}})' = -3 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Многие студенты не учитывают при нахождении производной роли области определения функции.

Пример 2. Продифференцировать функцию

$$y(x) = \lg \frac{x-8}{x}.$$

Найдя производную

$$y'(x) = \frac{8}{x(x-8)\ln 10},$$

студенты не замечают тот факт, что выражение

$$\frac{8}{x(x-8)\ln 10}$$

имеет смысл при всех значениях  $x$ , отличных от  $0$  и  $8$ , тогда как исходная функция определена лишь при  $x < 0$  или  $x > 8$ . Не учитывая этого, студенты записывают ответ:

$$y'(x) = \frac{8}{x(x-8)\ln 10}, \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; 8) \cup (8; \infty)$$

и тем самым пренебрегают определением производной, из которого вытекает, что производная не может быть определена в точках, где не определена сама исходная функция.

Многие из студентов не принимают во внимание и того, что условие дифференцируемости функции в какой-либо точке является достаточным условием ее непрерывности в этой точке, а непрерывность функции в точке является необходимым условием ее дифференцируемости в этой точке.

Пример 3. Продифференцировать функцию

$$y(x) = x \cdot |x|.$$

Эта функция дифференцируема во всех точках, но к ней неприменимо непосредственно правило взятия производной от произведения, так как в качестве второго множителя выступает  $|x|$ .

Действительно, в некоторой окрестности всякой точки  $x_0 > 0$  имеем

$$x \cdot |x| = x^2,$$

откуда

$$y'(x_0) = 2x_0;$$

в некоторой окрестности всякой точки  $x_0 < 0$  аналогично имеем

$$x \cdot |x| = -x^2,$$

откуда

$$y'(x_0) = -2x_0;$$

в точке  $x_0 = 0$  необходимо найти производную с помощью определения

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = 0$$

С учетом этого верный ответ имеет вид:

$$y'(x) = 2|x|$$

Разнообразные ошибки студенты допускают при нахождении производных от дробных функций в первую очередь из-за трудоемкости процедуры вычислений. В связи с этим мы рекомендуем студентам там где это возможно, предварительно преобразовать данную дробь.

**Пример 4.** Продифференцировать функцию

$$y(x) = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

Для того, чтобы упростить процесс дифференцирования данной функции, рекомендуем студентам предварительно упростить данную дробь следующим образом:

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} = \tan^2 x$$

Не выполнив такого преобразования, студенты сталкиваются с довольно громоздкими преобразованиями, что влечет за собой появление ошибок.

Применение предварительного преобразования позволяет иногда достичь особенного эффекта при дифференцировании функций, содержащих логарифмы.

**Пример 5.** Продифференцировать функцию

$$y(x) = \ln \frac{7\sqrt{x-1}}{x}$$

Незначительное число студентов в группах первого курса преобразовали заданную функцию, использовав свойства логарифмической функции. Большинство из них сразу же стали находить производную как от сложной функции, чем загромоздили решение и спровоцировали появление ошибок, которых можно было бы избежать, выполнив следующие преобразования:

$$y(x) = \ln 7 \cdot \sqrt{x-1} - \ln x = \ln 7 + \ln \sqrt{x-1} - \ln x = \ln 7 + \frac{1}{2} \ln(x-1) - \ln x$$

Но, между тем, следует отметить, что при рекомендации студентам подобных преобразований необходимо предупредить их о возможном сужении области определения исходной функции.

Вернемся к примеру 2. Если преобразовать заданную функцию, то будем иметь:

$$y(x) = \ln(x-8) - \ln x$$

Видим, что область определения в данном случае до преобразования была  $x < 0$  или  $x > 8$ , а после преобразований стала  $x > 8$ .

Путем решения подобных примеров необходимо добиться от студентов понимания того, что преобразования целесообразно применять лишь в тех случаях, когда они не сужают область определения исходной функции.

Грубые ошибки допускаются многими абитуриентами и студентами младших курсов при нахождении производных от функции, которые в заданном виде дифференцировать вообще невозможно.

**Пример 6.** Продифференцировать функцию  
 $y(x)=x^2x$ .

Большинство студентов первого курса физико-математического факультета дифференцируют данную функцию либо как показательную, либо как степенную. Они не знают, что здесь необходимо предварительно представить данную функцию в следующем виде:

$$y(x) = (e^{\ln x})^{2x} = e^{2x \ln x}.$$

Подобная ситуация повторяется и при нахождении производных от функций, заданных с помощью логарифмов, у которых основание не является постоянным и под знаком логарифма также содержится переменная.

**Пример 7.** Продифференцировать функцию

$$y(x) = \log_x(x - 2).$$

Решая этот пример, многие студенты дифференцируют данную функцию как логарифмическую с постоянным основанием, что также является грубой ошибкой. Как и в предыдущем случае, большинство студентов не знают, что в данном случае функцию необходимо обязательно преобразовать путем перехода к основанию е:

$$y(x) = \log_e(x-2) = \ln(x-2)/\ln x.$$

Следует отметить также, что довольно распространенной является ошибка, когда при дифференциировании показательной и логарифмической функции производная берется лишь от «внешней» функции. Студенты берут производную от показательной или логарифмической функций и не умножают затем на производную показателя или логарифмического выражения соответственно, как это предписывает правило дифференцирования сложной функции одной действительной переменной.

К большому сожалению, встречаются и ошибки следующего характера. Беря производную, например, от функции

$$y(x) = \cos 12x \cdot \sin \frac{\pi}{12},$$

многие абитуриенты и студенты младших курсов зачем-то применяют правило дифференцирования произведения, а некоторые из них постоянную величину  $\sin \frac{\pi}{12}$  дифференцируют по  $\pi$ , демонстрируя тем самым чисто формальные знания формул и правил дифференцирования.

С целью устраниТЬ появление подобных ошибок в дальнейшем мы предлагаем студентам задания следующего типа для самостоятельного решения (в домашнем задании, в самостоятельной работе, в семестровом задании и т.д.). Кроме того, организовываются дополнительные занятия и индивидуальные консультации для неуспевающих студентов, где они имеют возможность более подробно разобраться с теми моментами в решениях задач, которые вызывают у них наибольшие затруднения.

Продифференцировать следующие функции:

- |  |   |
|--|---|
| a) $y(x) = \frac{x + 3x^2}{2x^3};$                       | д) $y(x) = \operatorname{tg} \cos 3x;$  |
| б) $y(x) = e^{2x} (\cos^2 x - 2);$                       | е) $y(x) = \log_{\sqrt{x}}(x - 2)^4;$   |
| в) $y(x) = \ln(\sqrt[7]{x+1});$                          | ж) $y(x) = (x^2 + 1)^x;$                |
| г) $y(x) = 3 \cos \frac{2x}{\pi} + \sin \frac{5\pi}{2};$ | з) $y(x) =  x  \cdot \frac{x}{2}$ и др. |

С учетом вышеизложенного мы в процессе изучении со студентами вопросов дифференцируемости функции одной действительной переменной на занятиях по математике посредством решения системы упражнений и повторения основных теоретических вопросов ставим своей целью добиться от студентов четкого уяснения следующих моментов:

- находя производные, необходимо следить за областью допустимых значений неизвестных, участвующих в данной задаче, особенно за изменением этой области в процессе различных преобразований;

- применять известные формулы и правила не механически, а творчески, с учетом особенностей данной задачи;
- помнить, что для дифференцируемости функции в какой-либо точке необходимо, но недостаточно, чтобы функция была непрерывна в этой точке и определена в некоторой окрестности этой точки.

Целенаправленная и систематическая работа по предупреждению ошибок, проводимая нами при чтении лекций и на практических занятиях по математике, способствует не только осознанному восприятию и грамотному применению изученного материала к решению математических задач, но и стимулирует развитие познавательной и творческой активности студентов. Более того, в процессе такой работы мы указываем студентам те элементы знаний, которые можно использовать при изучении других дисциплин, что повышает интерес студентов к дальнейшему обучению.

#### Литература

1. Математика: V–XI классы: учебная программа для учреждений общего среднего образования с русским языком обучения. – Минск: МО РБ, 2012. – 52 с.

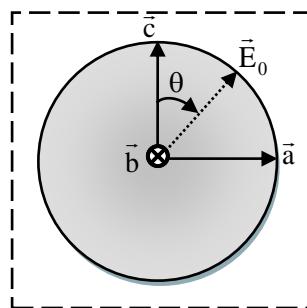
**В. В. Давыдовская, В. В. Шепелевич**

### ЗАВИСИМОСТЬ СТЕПЕНИ САМОФОКУСИРОВКИ ДВУМЕРНОГО СВЕТОВОГО ПУЧКА В ФОТОРЕФРАКТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ SBN ОТ НАПРАВЛЕНИЯ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Распространение и взаимодействие двумерных световых пучков в фоторефрактивном кристалле SBN рассматривалось многими авторами (см., напр., [1, 2]).

Однако в большинстве работ при исследовании световых пучков учитываются только две компоненты  $\Gamma_{33}$  и  $\Gamma_{13}$  электрооптического тензора  $\hat{\Gamma}$ , а направление внешнего электрического поля выбирается параллельным оптической оси кристалла [3–7]. В настоящей статье показано, что выбиралось в этих работах направление внешнего электрического поля, приложенного к фоторефрактивному кристаллу SBN, не является оптимальным, и установлена зависимость степени самофокусировки  $x$ - и  $y$ -поляризованных двумерных гауссовых световых пучков от этого направления при постоянном радиусе входных пучков и с учетом всех компонент электрооптического тензора.

Пусть двумерный гауссов световой пучок нормально падает на лицевую грань фоторефрактивного кристалла класса симметрии  $4mm$ , оптическая ось  $\vec{c}$  которого лежит в плоскости лицевой грани. Направим ось  $ox$  рабочей системы координат вдоль кристаллографической оси  $\vec{c}$ , являющейся оптической осью кристалла. Пусть внешнее электрическое поле  $\vec{E}_0$  направлено под углом  $\theta$  к оптической оси  $\vec{c}$ . Ось  $oz$  направим вдоль кристаллографической оси  $\vec{b}$ , ось  $oy$  – вдоль кристаллографической оси  $\vec{a}$  (рисунок 1).



**Рисунок 1 – Лицевая грань кристалла. Направление кристаллографических осей и вектора напряженности внешнего электрического поля**

Тогда из уравнений Maxwella и основных уравнений фоторефрактивного эффекта [8] можно получить в параксиальном приближении следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{\partial A_{1x}}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_e} \left( \frac{\partial^2 A_{1x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{1x}}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0 n_e^3}{2} A_{1x} r_{33} \left( E_{0x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0, \\ i \frac{\partial A_{1y}}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_o} \left( \frac{\partial^2 A_{1y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{1y}}{\partial y^2} \right) + \frac{k_0 n_o^3}{2} A_{1y} r_{42} \left( E_{0y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0, \\ i \frac{\partial A_{2y}}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_o} \left( \frac{\partial^2 A_{2y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{2y}}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0 n_o^3}{2} A_{2y} r_{13} \left( E_{0x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0, \\ i \frac{\partial A_{2x}}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_e} \left( \frac{\partial^2 A_{2x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{2x}}{\partial y^2} \right) + \frac{k_0 n_e^3}{2} A_{2x} r_{42} \left( E_{0y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Система уравнений (1) может быть использована как для описания взаимодействия ортогонально поляризованных двумерных световых пучков, так и для описания их распространения в фоторефрактивном кристалле SBN. В случае изучения распространения световых пучков два первые уравнения системы (1) опишут распространение x-поляризованного пучка, а два вторые – y-поляризованного пучка.

В системе уравнений (1)  $A_{1x} = A_{1x}(x, y, z)$ ,  $A_{1y} = A_{1y}(x, y, z)$  и  $A_{2x} = A_{2x}(x, y, z)$ ,  $A_{2y} = A_{2y}(x, y, z)$  – комплексные проекции на оси ох и oy векторных огибающих напряженностей электрического поля x- и y-поляризованных световых пучков соответственно;  $k_0$  – длина волнового вектора световых пучков в вакууме,  $n_o$  – показатель преломления обыкновенной волны,  $n_e$  – показатель преломления необыкновенной волны;  $E_{0x}$  и  $E_{0y}$  – проекции вектора  $\bar{E}_0$  на оси ох и oy соответственно,  $r_{13}$ ,  $r_{33}$  и  $r_{42}$  – компоненты электрооптического тензора кристалла,  $\phi$  – переопределенный электрический потенциал, связанный с потенциалом поля пространственного заряда  $\phi$  соотношением

$$\phi = \phi + E_{0x}x + E_{0y}y, \quad (2)$$

определенный из уравнения (см., например, [9, 10]).

$$\nabla^2 \phi + \nabla \ln(1+I) \cdot \nabla \phi - \frac{K_B T}{q} [\nabla^2 \ln(1+I) + (\nabla \ln(1+I))^2] = E_{0x} \frac{\partial}{\partial x} \ln(1+I) + E_{0y} \frac{\partial}{\partial y} \ln(1+I), \quad (3)$$

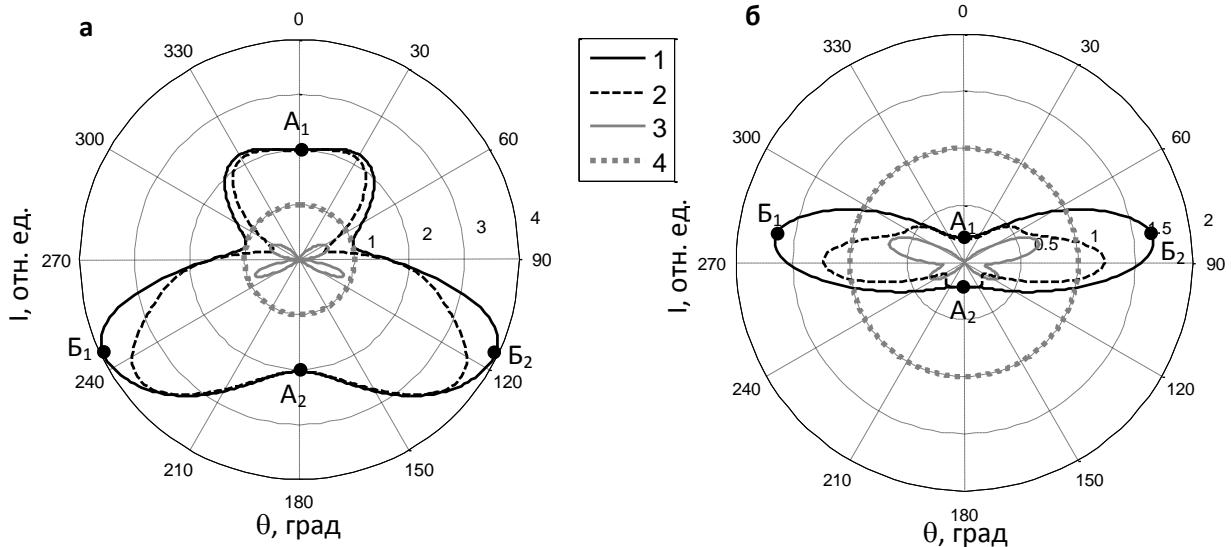
$$I = \frac{n_e |A_{1,2x}|^2 + n_o |A_{1,2y}|^2}{2\eta_0 I_d} - \quad (4)$$

относительная интенсивность светового поля в области распространения x- и y-поляризованных световых пучков,  $I_d$  – темновая интенсивность кристалла, включающая фоновую засветку,  $K_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура,  $q$  – элементарный заряд,  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$  [10].

При выводе уравнений (1) было использовано ковариантное представление [11] электрооптического тензора кристалла класса 4mm, также при расчетах учитывался различный набег фазы обыкновенной и необыкновенной волн при фиксированной координате z.

Рассмотрим распространение двумерных гауссовых световых пучков с x- и y-поляризациями в фоторефрактивном кристалле SBN с учетом всех компонент электрооптического тензора  $\hat{r}$  при различных направлениях приложенного внешнего электрического поля.

Для моделирования использовались следующие параметры:  $n_e = 2.33$ ,  $n_o = 2.36$ ,  $r_{33}=235$  пм/В,  $r_{13}=47$  пм/В,  $r_{42}=30$  пм/В, (например, [7]),  $\lambda = 0.5145$  мкм,  $r_0 = 12$  мкм, внешнее приложенное электрическое поле  $E_0 = 1.2$  кВ/см, толщина кристалла 10 мм.



(а), (б) – x- и y-поляризованные гауссовые световые пучки соответственно;

- 1 – суммарная относительная интенсивность пучка на выходе из кристалла,
- 2 – интенсивность x-компоненты пучка на выходе из кристалла,
- 3 – интенсивность y-компоненты пучка на выходе из кристалла,
- 4 – относительная интенсивность пучка на входе в кристалл

**Рисунок 2 – Зависимость степени самофокусировки двумерного гауссова светового пучка в кристалле SBN от направления внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу, с учетом всех компонент электрооптического тензора**

Из рисунка 2 видно, что при  $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 180^\circ$  (рисунок 2, а, б: точки  $A_1$  и  $A_2$ ), т. е. когда внешнее электрическое поле направлено параллельно оптической оси кристалла, интенсивности составляющих световых пучков, появляющихся за счет учета компоненты  $r_{42}$  (рисунок 2, а, б: кривые 3), не вносят вклада в суммарную интенсивность (рисунок 2, а, б: кривые 1), которая определяется интенсивностями составляющих пучков, возникающих за счет учета компонент  $r_{33}$  и  $r_{13}$  электрооптического тензора  $\hat{r}$  для x- и y-поляризованных гауссовых световых пучков соответственно (рисунок 2, а, б: кривые 2), поэтому достаточно учитывать только эти две компоненты.

Однако при других направлениях внешнего электрического поля пренебрегать компонентой  $r_{42}$  нельзя, так как интенсивности составляющих световых пучков, появляющихся за счет учета этой компоненты (рисунок 2, а, б: кривые 3), вносят существенный вклад в суммарную интенсивность световых пучков (рисунок 2, а, б: кривые 1). Наибольшая степень фокусировки x-поляризованного светового пучка наблюдается при значениях угла  $\theta = 117^\circ$  и  $\theta = 247^\circ$  (рисунок 2, а: точки  $B_1$  и  $B_2$ ),  $I=3.96$  отн. ед., а для y-поляризованного светового пучка при значениях угла  $\theta = 84^\circ$  и  $\theta = 279^\circ$  (рисунок 2, б: точки  $B_1$  и  $B_2$ ),  $I = 1.6$  отн. ед.

Таким образом, показано, что в случае, когда внешнее электрическое поле направлено параллельно оптической оси кристалла, при расчетах степени самофокусировки гауссова светового пучка достаточно учитывать только две компоненты  $r_{33}$  и  $r_{13}$  электрооптического тензора, а при других направлениях поля необходимо учитывать все его компоненты. Найдены направления внешнего электрического поля, для которых степень самофокусировки световых гауссовых пучков заданного размера с входной x- или y- поляризацией на входе в кристалл достигает максимального значения.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (Ф12Р-222), а также при частичной поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Электроника и фотоника» (Фотоника 2.2.09).

### **Литература**

1. Królikowski, W. Photorefractive solitons / W. Królikowski, B. Luther-Davies, C. Denz // IEEE Journal of Quantum Electron. – 2003. – Vol. 39. – P. 3–12.
2. Tiemann, M. Photorefractive spatial solitons as waveguiding elements for optical telecommunication / M. Tiemann, T. Halfmann, T. Tschudi // Opt. Commun. – 2009. – Vol. 282. – P. 3612–3619.
3. Wesner, M. Electrical fixing of waveguide channels in strontium-barium niobate crystals / M. Wesner, C. Herden, D. Kip // Appl. Phys. B. – 2001. – Vol. 72. – P. 733–736.
4. Discrete solitons in photorefractive optically induced photonic lattices / N.K. Efremidis [et al] // Physical Review E. – 2002. – Vol. 66. – P. 602–607.
5. Two Dimensional Counterpropagating Spatial Solitons in Photorefractive Crystals / M. Petrović [et al] // Physical Review Letters. – 2005. – Vol. 95. – P. 901–904.
6. Imbrock, J. Spatial photorefractive solitons with picosecond laser pulses / J. Imbrock, C. Heese, C. Denz // Appl. Phys. B. – 2009. – Vol. 95. – P. 261–268.
7. Interactions between spatial screening solitons propagating in opposite directions / C. Rotschild [et al] // J. Opt. Soc. Am. B. – 2004. – Vol. 21, No. 7. – P. 1355–1357.
8. Holographic storage in electrooptic crystals: 1. Steady state / N.V. Kukhtarev [et al] // Ferroelectrics. – 1979. – Vol. 22. – P. 949–960.
9. Motzek, K. Dipole-mode vector solitons in anisotropic photorefractive media / K. Motzek // Opt. Commun. – 2001. – Vol. 197. – P. 161–168.
10. Ярив, А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх; пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 616 с.
11. Барковский, Л.М. Ковариантная форма электрооптического тензора в кристаллах высшей и средних сингоний при векторном взаимодействии / Л.М. Барковский, Ф.И. Федоров // Кристаллография. – 1965 . – Т. 10, № 2. – С. 174–180.

### **С. Н. Дегтяр**

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ТВОРЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

Одной из главных задач в обучении является развитие творческих и исследовательских способностей обучающихся. Творчество понимается как деятельность, направленная на создание существенно нового; как процесс, включенный в постановку и решение проблем, нестандартных задач; как форма познания действительности и т.д. [1, 12]. Следует заметить, что при изучении информатики как нельзя более полно проявляются творческие способности учащихся и студентов. Развития творческих способностей можно достичь средствами информационно-коммуникационных технологий и методом моделирования, который позволяет реализовать данную задачу.

Сравним основные этапы компьютерного моделирования и творческого процесса.

<b>Этапы моделирования [2]:</b>	<b>Этапы творческого процесса [3]:</b>
1. Постановка задачи: - описание задачи; - цель моделирования; - анализ объекта.	1. Осознание проблемы: - возникновение проблемной ситуации; - осмысление и понимание наличных данных; - постановка проблемы (вопроса).
2. Разработка модели.	2. Разрешение проблемы: выработка гипотезы; развитие решения, эксперимент.
3. Компьютерный эксперимент.	
4. Анализ результатов моделирования (если результаты не соответствуют целям, значит, допущены ошибки на предыдущих этапах).	3. Проверка решения (в результате осуществления данного этапа выдвинутая гипотеза может не оправдаться, тогда она заменяется другой).

Анализируя выполненное сравнение можно заметить, что процесс моделирования легко вписывается, согласуется с творческим процессом.

Умения, опыт, творческие способности приобретаются и проявляются только в процессе деятельности. А основным видом учебной деятельности является решение задач. Большинство задач компьютерного моделирования относятся к учебно-творческим, проблемным задачам, в которых обучающиеся совершают выбор, находят новый путь решения и реализацию алгоритма. Здесь и требуются особые качества ума, такие, как наблюдательность,

умение сопоставлять и анализировать, находить связи и зависимости, все то, что составляет творческие способности.

При сопоставлении целей творческих задач и задач по компьютерному моделированию также можно заметить их единство. На основе этого единства выделяют следующие типы задач по компьютерному моделированию, которые развивают определенные компоненты творческих способностей:

- задачи с некорректно представленной информацией, развивающие способность находить нужную информацию и применять ее в условиях задачи;
- задачи на прогнозирование, развивающие способность генерировать идеи, выдвигать гипотезы;
- задачи на оптимизацию, развивающие гибкость, рационализм мышления;
- задачи логические, развивающие интеллектуально-логические способности;
- задачи на разработку алгоритмических и эвристических предписаний, развивающие способность к обобщению и свертыванию мыслительных операций, способность к рефлексии мышления;
- задачи на корректную постановку задачи, развивающие способность формулировать и переформулировать задачи;
- задачи на обнаружение противоречия и формулировку проблемы, развивающие способность к видению проблем и противоречий;
- задачи на конструирование, развивающие способности к конструированию;
- задачи на рецензирование, развивающие критичность мышления, способность к оценочным суждениям.

В то же время описанные типы задач по компьютерному моделированию можно разделить на три группы:

1. Задачи, демонстрирующие основные понятия раздела в профессиональном контексте.

Решение подобных задач предполагает одно или два действия и опирается на математическое понятие или теоретическое положение. Такие задачи можно вводить в самостоятельную работу, для помощи обучающимся можно давать ориентировку: образец решения, алгоритм действий, конечный результат. Такие задачи оказывают положительное воздействие на умение анализировать конкретную профессиональную ситуацию, видеть содержательные связи изучаемого явления, выделять главное, пренебрегая несущественным, кроме того, задачи, раскрывающие смысл определенного понятия в прикладной области, способствуют формированию профессиональных мотивов.

2. Задачи динамического характера, условие которых представляет собой серию взаимосвязанных проблем.

Работа по составлению динамической задачи дает большой простор творчеству преподавателя: он должен разобрать различные способы решения, рассмотреть частные случаи, вытекающие из исходной задачи, продумать возможности осуществления дифференцированного подхода. Дидактическая ценность таких задач в том, что они порождают серию взаимосвязанных вопросов, в решении которых требуется умение целенаправленно наблюдать, сравнивать, обобщать, выдвигать, доказывать или опровергать гипотезу, составлять математическую модель конкретной ситуации. Эта задача становится динамической, если с ее условием продолжить работу, вводя новые задания и усложняя их.

Для самоконтроля решения динамических задач можно сообщать промежуточные и конечные результаты, или давать общие рекомендации к решению. В самостоятельной работе динамические задачи можно варьировать в зависимости от уровня обучающихся, часть дополнительных заданий к условию целесообразно предлагать как необязательные. Для преподавателя важным и наглядным показателем мотивации обучающихся будет выбор и решение необязательного задания.

3. Задачи исследовательского характера, в ходе работы над которыми обучающиеся, решая познавательную проблему, осуществляют самостоятельный поиск пути решения, а также, анализируя условие, решение и математическую модель, формулируют новую задачу. Для таких задач характерно отсутствие образца, конечного ответа, есть только общие рекомендации.

В процессе обучения представляется важным использование не отдельных задач, а их целостной системы. В основу построения системы учебных задач по компьютерному

моделированию могут быть положены принципы систематизации творческих задач И.Я. Лернера [4], дополненные и скорректированные с ориентацией на новые образовательные результаты.

Таким образом, использование метода моделирования в обучении способствует формированию основных компонентов творческих способностей, что, безусловно, содействует повышению качества подготовки и конкурентоспособности выпускников на рынке труда.

#### **Литература**

1. Булатова О.С. Педагогический артистизм: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / О.С. Булатова. – М.: Изд. центр Академия, 2001. – 240 с.
2. Информатика. 7–9 класс. Базовый курс. Теория / под ред. Н.В. Макаровой. – СПб.: Питер, 2002. – 368 с.
3. Пономарев, Я.А. Психология творчества и педагогика / Я.А. Пономарев. – М.: Педагогика, 1976.
4. Теоретические основы содержания общего среднего образования / под ред. В.В. Краевского, И.Я. Лернера. – М.: Педагогика, 1983. – 352 с.

**Л. В. Дорошева**

### **РАЗВИТИЕ КРЕАТИВНОСТИ МЫШЛЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ДВИЖЕНИЕ И ФАЗЫ ЛУНЫ» В КУРСЕ АСТРОНОМИИ**

В настоящий момент особую актуальность приобретает необходимость разработки технологии развития креативности студентов педагогического вуза. Необходимо подготовить студентов к творческой педагогической деятельности, в которой приобретаемые профессиональные навыки будут средством развития личности ученика. Однако, ориентация вуза и школы на некую среднестатистическую модель студента и ученика, на директивно заданный норматив, как правило, приводит к тому, что упускаются возможности развития индивидуальных способностей учащихся, креативности их мышления. Опыт работы показывает, что развитие творческого потенциала возможно при гуманистической направленности обучения, соблюдении принципа личностно-ориентированного подхода, учёте эмоциональной, интеллектуальной и психологической готовности студента как субъекта педагогического процесса [1].

Однако в литературе мало внимания уделяется проблеме развития креативности студентов как в процессе обучения вообще, так и в процессе изучения астрономии, в частности. В то же время необходимо подчеркнуть, что астрономия, как учебная дисциплина, имеет огромный потенциал в развитии креативности. Одним из средств развития креативности мышления является учебный материал гуманитарной направленности как педагогически целесообразная система познавательных задач [2, 3].

Для реализации целей исследования разработан комплекс задач по теме «Движение и фазы Луны» для развития креативности мышления учащихся.

#### **Комплекс задач по теме «Движение и фазы Луны»**

1. Можно ли где-нибудь на Земле видеть серп Луны в виде лодочки, рогами кверху [4]?
2. На географическом полюсе Земли Солнце полгода находится над горизонтом и полгода – под горизонтом. А Луна [3]?
3. Если на Земле наблюдается лунное затмение, то, что увидит в это время наблюдатель, находящийся на Луне [4]?
4. Артур Кларк в романе «2001: Одиссея 1» [5] так описывает восход Солнца на Луне: «... на востоке из-за горизонта вырвалась тоненькая дуга нестерпимо яркого света. Оставался еще целый час до момента, когда Солнце полностью поднимается над горизонтом ...». Определите, на какой широте Луны разворачивается действие романа [3]?
5. В рассказе А. П. Чехова «Аптекарша» [6] есть такие строки: «Неожиданно из-за отдаленного кустарника выползает большая, широколицая Луна. Она красна (вообще, Луна, вылезая из-за кустов, всегда почему-то бывает ужасно сконфужена)». Вопрос: Почему Луна была красна и широколица? И важно ли, что кустарник был отдаленным [3]?
6. В третьей главе романа Михаила Булгакова «Мастер и Маргарита» [7] описан майский вечер в Москве на Патриарших прудах: «Небо над Москвой как бы выцвело, и совершенно отчетливо была видна в высоте полная Луна, но еще не золотая, а белая». Какую неточность допустил здесь писатель [3]?

7. По следующему описанию в стихах Валентина Солоухина [8] оцените фазу Луны и определите ее азимут [4].

Затихли в лозняке дрозды,  
Померкли на рябинах гроздья.  
Запахло мяты.  
Свет звезды  
Красней, чем бакен в половодье.  
Великий мир.  
Спокойна ночь,  
И над безлюдной луговиной,  
Стараясь сумрак превозмочь,  
Зарделся месяц половинный...

8. По следующему описанию в стихах Александра Блока [9] определите, в каком созвездии находится Луна [4].

Дух прянный марта был в лунном круге,  
Под талым снегом хрустел песок.  
Мой город истаял в мокрой выюге,  
Рыдал, влюбленный, у чых-то ног.

9. По следующему описанию в стихотворении «Вечер» Зинаиды Гиппиус [10] определите азимут Луны. В каком созвездии она находится [4]?

Июльская гроза, шумя, прошла.  
И тучи упливают полосою.  
Лазурь неясная опять светла...  
Мы лесом едем, влажною тропою.  
Спускается на землю бледный мрак.  
Сквозь дым небесный виден месяц юный,  
И конь все больше замедляет шаг,  
И вожжи тонкие дрожат, как струны.

10. Почему в следующих стихах Александра Блока [11] месяц назван красным, и в какой фазе находится Луна?

Белой ночью месяц красный  
Выплывает в синеве.  
Бродит призрачно-прекрасный,  
Отражается в Неве.

Мне провидится и снится  
Исполненье тайных дум.  
В вас ли доброе таится  
Красный месяц, тихий шум?...

11. В повести «Зло» [12] русского писателя XIX века С. П. Подьячева есть такой эпизод: «Агафья проснулась рано, часу в четвертом, и потихоньку, как была в одной рубашке и босая, вышла из избы на крыльце посмотреть, какова погода. Погода была хорошая. На улице было тихо, безмятежно, и всё молчало. Небо было чисто, безоблачно и все усыпано звёздами, как-то особенно ярко сверкающими под утро малыми и крупными точками. Серп месяца, тонкий и молочно-бледный, окружённый какой-то дымкой, висел в беспредельной шире неба, на западе, и тихо горел, точно какая-то далекая, готовая погаснуть лампада...»

Какие астрономические неточности есть в этом описании?

12. Стихотворение Зинаиды Гиппиус «Мудрость» [13] начинается так:

Сошлись чертовки на перекрёстке,  
На перекрёстке трех дорог.  
Сошлись к полночи, и месяц жёсткий  
Висел вверху, кривя свой рог...

Есть ли в этих строках астрономическая неточность?

13. В стихотворении «Октябрьский рассвет» [14] классик русской художественной литературы И. А. Бунин утверждает:

Ночь побледнела, и месяц садится  
За реку красным серпом.

14. В романе Сигрид Унсет «Улав, сын Аудуна из Хествикина» [15] есть такой эпизод. « – Бежать? - медленно спросил Улав. - Без суда? Это владыко велит мне так? – Нет, это велю я.

Епископ и окружной наместник едва ли успели узнать про убийство... Эти люди сейчас ищут тебя, но по такому бездорожью они вряд ли успеют вскорости пройти такой дальний путь и добраться сюда, а теперь уже скоро ночь. Как бы там ни было, дерзём во имя бога - останемся здесь, пока не взойдёт после полуночи полная луна. Будет светлее, да и подморозит...»

Верно ли предложение с астрономической точки зрения?

#### Литература

1. Тихомирова, С. А. Гуманитаризация физического образования / С. А. Тихомирова // Физика в школе. - 1996. - № 6. - С. 39–46.
2. Галузо, И. В. Методика обучения астрономии: учебно-методическое пособие / И. В. Галузо, В. А. Голубев, А. А. Шимбалев. – Витебск: ВГУ им. П. М. Машерова, 2007. – 116 с.
3. Сурдин, В. Г. Астрономические олимпиады. Задачи с решениями / В. Г. Сурдин. – М.: МГУ, 1995. – 320 с.
4. Галузо, И. В. Астрономия: сборник качественных задач и вопросов: пособие для учителей общеобразоват. учреждений с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения / И. В. Галузо, В. А. Голубев, А. А. Шимбалев. – Минск: Аверсэв, 2007. – 256 с.
5. Кларк. А. 2001: Одиссея-1 / А. Кларк. – Москва: Мир, 1991. – С. 12, 26.
6. Чехов, А. П. Сочинения: в 6 т. / А. П. Чехов. – М.: Наука, 1986. – Т. 5. – С. 192.
7. Булгаков, М. А. Белая гвардия. Мастер и Маргарита / М. А. Булгаков. – Минск: Мастацкая літаратура, 1988. – С. 308.
8. Солоухин, В. А. Заповедная тропа. Стихи / В. А. Солоухин. – М.: Советский писатель, 1972. – С. 96.
9. Блок, А. А. Стихотворения и поэмы / А. А. Блок. – Минск: Мастацкая літаратура, 1989. – С. 212.
10. Гиппиус, З. Н. Сочинения: стихотворения, проза / З. Н. Гиппиус. – Ленинград: Художественная литература, 1991. – С. 70.
11. Блок, А. А. Стихотворения и поэмы / А. А. Блок. – Минск: Мастацкая літаратура, 1989. – С. 45.
12. Подьячев, С. П. Избранные произведения / С. П. Подьячев. – М.: Художественная литература, 1966. – С. 376.
13. Гиппиус, З. Н. Сочинения: стихотворения, проза / З. Н. Гиппиус. – Ленинград: Художественная литература, 1991. – С. 129.
14. Бунин, И. А. Собрание сочинений: в 5 т. / И. А. Бунин. – М.: Правда, 1956–1959. – Т. 1. – 1956. – С. 325.
15. Унсет, С. Улав, сын Аудуна из Хествикена / С. Унсет. – М.: Правда, 1984. – С. 178.

## О. С. Дыба

### ПОДГРУППОВОЙ $\mathfrak{X}$ -ФУНКТОР $n$ -АРНОЙ ГРУППЫ

Подгрупповые функторы, то есть согласованные с изоморфизмами групп функции, выделяющие в группах некоторые системы подгрупп, первоначально рассматривались в контексте теории радикалов колец. В теории конечных групп первоначально понятие подгруппового функтора использовалось в основном для обобщения конкретных теоретико-групповых объектов в направлении выделения и аксиоматизации их ключевых свойств.

Позже исследования показали, что метод подгрупповых функторов является удобным средством изучения специфических классов групп (формаций, классов Фитtingа и классов Шунка). Особый класс алгебраических систем образуют  $n$ -арные группы. Напомним [1], что система  $\langle X, () \rangle$  с одной  $n$ -арной операцией  $()$  называется  $n$ -арной группой, если эта операция ассоциативна, и в  $X$  разрешимо каждое из уравнений  $(a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n) = a$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Являясь  $n$ -арными аналогами бинарных групп,  $n$ -арные группы, с одной стороны, наследуют многие их свойства (так в  $n$ -арных группах имеются инвариантные и полуинвариантные подгруппы, вполне аналогичные по свойствам инвариантным подгруппам групп), а с другой – поскольку при  $n \geq 3$  в  $n$ -арной группе отсутствует единичный элемент, то теория  $n$ -арных групп весьма специфична по отношению не только к теории групп, но и по отношению к теориям алгебраических систем других типов.

Целью данной работы является рассмотрение примеров подгрупповых  $\mathfrak{X}$ -функторов  $n$ -арной группы. Вся терминология стандартна и заимствована из [1–3].

Пусть  $\mathfrak{X}$  – некоторый класс групп. Составим с каждой группой  $G \in \mathfrak{X}$  некоторую систему ее подгрупп  $\tau(G)$ . Будем говорить, следя [3], что  $\tau$  – подгрупповой  $\mathfrak{X}$ -функтор или

подгрупповой функтор на  $\mathfrak{X}$ , если выполняются следующие условия: 1)  $G \in \tau(G)$  для всех  $G \in \mathfrak{X}$ ; 2) для любого эпиморфизма  $\varphi: A \rightarrow B$ , где  $A, B \in \mathfrak{X}$  и для любых групп  $H \in \tau(A)$  и  $T \in \tau(B)$  имеет место  $H^\varphi \in \tau(B)$  и  $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$ .

Значение этого понятия связано прежде всего с тем, что подгрупповой функтор выделяет в группе те системы подгрупп, которые инвариантны относительно гомоморфизма и поэтому удобны при проведении индуктивных рассуждений.

Приведем некоторые известные результаты.

Лемма 1 ([2]). Пусть  $\pi$  – конгруэнция на универсальной алгебре  $A$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если  $\bar{H}$  – подалгебра в  $A/\pi$ , то  $H = \bigcup_{[a]_\pi \in \bar{H}} [a]_\pi$  – такая подалгебра в  $A$ , что  $\pi H = H$  и  $\bar{H} = H/\pi$ ;

2) если  $H$  – такая подалгебра в  $A$ , что  $\pi H = H$ , то  $H/\pi$  – подалгебра в  $H/\pi$ .

Лемма 2 ([2]). Пусть  $\varphi: A \rightarrow B$  – эпиморфизм универсальных алгебр.  $H \subseteq A, T \subseteq B$  и  $\pi = \text{Ker } \varphi$ . И пусть  $f: A/\pi \rightarrow B$  – канонический изоморфизм фактор-алгебры  $A/\pi$  на  $B$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1)  $(\pi H / \pi)^f = H^\varphi$ ;

2)  $\pi T^{\varphi^{-1}} = T^{\varphi^{-1}}$  и  $(T^{\varphi^{-1}} / \pi)^f = T$ .

Лемма 3 ([2]). Пусть  $\varphi: A \rightarrow B$  – эпиморфизм конечных однородных универсальных алгебр,  $H$  и  $T$  – подалгебры в  $A$  и  $B$  соответственно. Тогда

$$|A:T^{\varphi^{-1}}| = |B:T|$$

и  $|B:H^\varphi|$  делит  $|A:T|$

Пусть  $\mathfrak{X}$  – некоторый непустой класс конечных  $n$ -арных групп.

Теорема. Пусть  $\emptyset \neq \pi \subseteq P$  и пусть для каждой конечной  $n$ -арной группы  $G \in \mathfrak{X}$  множество  $\tau(G) = \{G\} \cup \Omega$ , где  $\Omega$  – множество всех тех подгрупп в  $G$ , индексы которых не делятся на числа из  $P$ . Тогда  $\tau$  – замкнутый подгрупповой  $\mathfrak{X}$ -функтор.

Доказательство. Пусть  $\varphi: A \rightarrow B$  – эпиморфизм конечных  $n$ -арных групп. Если  $H = A$ , то  $H^\varphi = B \in \tau(B)$ . Пусть  $H^\varphi \in \tau(A) \setminus \{A\}$ , тогда для любого  $p \in \pi$  число  $|A:H|$  не делится на  $p$ . По лемме 3 число  $|A:H|$  делится на число  $|B:H^\varphi|$ . Значит,  $|B:H^\varphi|$  не делится на  $p$ . Следовательно,  $H^\varphi \in \tau(B) \setminus \{B\}$ .

Если  $T = B$ , то  $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$ . Пусть теперь  $T \in \tau(B) \setminus \{B\}$ . Тогда для любого  $p \in \pi$  число  $|B:T|$  не делится на  $p$ . По лемме 3  $|B:T| = |A:T^{\varphi^{-1}}|$ . Значит, число  $|A:T^{\varphi^{-1}}|$  не делится на  $p$ . Следовательно,  $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A) \setminus \{A\}$ . Ясно, что  $G \in \tau(G)$ .

Пусть теперь  $H \in \tau(G)$ . И пусть  $H_1 \in \tau(G)$ . Тогда для любого  $p \in \pi$  число  $|H:H_1|$  не делится на  $p$ :

$$|G:H_1| = \frac{|G|}{|H_1|} = \frac{|G|}{|H|} \cdot |H:H_1| = |G:H||H:H_1|.$$

Значит,  $|G:H_1|$  не делится на  $p$ . Следовательно,  $\tau(H) \subseteq \tau(G)$ . Итак,  $\tau$ -замкнутый подгрупповой  $\mathfrak{X}$ -функтор.

### Литература

1. Русаков, С.А. Алгебраические  $n$ -арные системы: Силовская теория  $n$ -арных групп / С.А. Русаков – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.
2. Ефремова, М.И. Некоторые свойства подалгебр универсальных алгебр / М.И. Ефремова. – Гомель, 2002. – 13 с.
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

## СОВРЕМЕННЫЙ УЧИТЕЛЬ ИНФОРМАТИКИ

Проблема подготовки школьного учителя информатики – одна из центральных в решении комплекса проблем информатизации образования. За период преподавания предмета информатики в школе в общих чертах сформировалось мнение, каким должно быть школьное образование по информатике и её приложениям, каким образом новые информационные технологии должны найти своё отражение в учебно-воспитательном процессе в целом, каков государственный стандарт высшего профессионального педагогического образования по специальности «Учитель информатики в школе». За период обучения студенты изучают много дисциплин, которые готовят их к будущей профессии. Одной из главных является методика преподавания информатики, о чём и пойдёт речь.

Мы готовим учителей сегодня для работы завтра. Исходя из этого, и формулируются проблемы методической подготовки учителя информатики. Необходимо помнить о том, что при преподавании информатики в школе учитель должен придерживаться формирования компьютерной грамотности, компьютерной образованности и информационной культуры. А для этого педагогический вуз должен подготовить соответствующего специалиста по специальности учитель информатики. К моменту получения диплома необходимо, чтобы будущий учитель умел:

- понять и присвоить цели изучения школьной информатики, а также каждой темы в отдельности во всех трёх аспектах – образования, развития и воспитания;
- увидеть место и значение курса информатики в общем образовании школьника;
- освоить содержание курса, для этого необходимо провести сравнительное изучение существующих учебников и программ по курсу информатики;
- понять принципы отбора содержания, уметь пользоваться ими;
- овладеть средствами изучения курса, освоить классические и новые методы обучения, управлять умственной деятельностью учащихся;
- освоить различные организационные формы занятий;
- увидеть, понять и вскрыть связи информатики с другими дисциплинами;
- научиться анализировать процесс обучения информатике, использовать и разрабатывать его программное и техническое обеспечение;
- уметь пробуждать, закреплять и развивать интерес к своему предмету как во время урока, так и вне занятий.

Учитывая вышесказанные задачи образования, теоретическая часть курса «Методика преподавания информатики» состоит из трёх разделов: общие и частные вопросы методики, а также методики дополнительного обучения информатике.

При рассмотрении общих вопросов упор делается на уже известные понятия и методики из дидактики и близких дисциплин с позиции урока информатики.

Вопросы частной методики изучаются с позиции анализа каждой темы школьного курса информатики. Акцент делается на выделении целей, знаний, умений и методических рекомендаций в процессе изучения темы. Правильно определить цели к каждому уроку – немаловажная проблема для студентов. Поэтому в курсе лекций специально рассматривается вопрос постановки целей в трёх аспектах: образование, развитие и воспитание. Рассматриваются специальные «клише», которые можно использовать на первых порах, не имея опыта работы.

Особое внимание необходимо уделить методическим рекомендациям, где необходимо отразить: с помощью какого программного средства изучается тема; особые моменты, которые вызывают трудность в изучении материала; типы заданий; используемые методы, формы и средства обучения; методы и формы контроля и самоконтроля.

Самое главное – практически отработать, чтобы будущий специалист научился выделять то, что необходимо рассмотреть на уроке, а что можно изучить самостоятельно. Проблема отбора содержания материала урока очень важна. В связи с этим можно предложить цикл лабораторных занятий, на которых студенты научатся выделять цели, содержание и формы контроля.

Особого внимания требует разработка тематики лабораторных занятий. Согласно установленным стандартам, на данных занятиях студенты должны научиться:

- проводить логико-дидактический анализ содержания школьного курса информатики, его отдельных тем, понятий, учебных заданий;
- составлять тематический план изучения того или иного раздела;
- планировать и проводить различные типы уроков;
- уметь формировать и развивать логическое и алгоритмическое мышление;
- научиться работать с программно-педагогическими средствами, грамотно использовать их на уроках информатики;
- организовывать и осуществлять контроль уровня усвоения знаний и умений;
- пользоваться стандартными пакетами программ для разработки учебно-методических комплексов;
- проводить дополнительное обучение в форме факультативов и внеклассной работы.

Все вышеперечисленные пункты отрабатываются на лабораторных занятиях. Каждому студенту даётся право выбрать любую тему из школьной программы, на основании которой он должен подготовить проект одного урока. В данном проекте необходимо продемонстрировать проверку домашнего задания, объяснение нового материала и дальнейшее его закрепление. Одно из требований – показать интересные методики и формы работы. Занятия проводятся в ролевой форме. Студент, готовивший проект урока, играет роль учителя, а оставшиеся члены группы – роль учеников. После проведения урока проводится анализ, в котором отмечаются положительные и отрицательные моменты разработки и демонстрации проекта. Данная методика апробирована на протяжении многих лет. У студентов в ходе таких занятий формируются следующие навыки:

- правильно строить разговор с аудиторией;
- учиться поддерживать контакт с большим количеством учащихся;
- выходить из сложных психологических ситуаций;
- участвовать в дальнейшем анализе для коррекции ошибок;
- анализировать урок своего будущего коллеги.

Для формирования логического и алгоритмического мышления на лабораторных занятиях студентам предлагается прорешать серию задач, по темам школьной программы. Цель – проверить владение программированием и умение объяснять основные понятия, используемые в решении задачи.

Для разработки учебно-методических комплексов можно предложить подготовку вспомогательных материалов с помощью информационных технологий. Это могут быть электронные учебники, электронные помощники, а также разного рода электронный вспомогательный материал в помощь проведения урока. При создании необходимо помнить, что для ученика слово «очевидно» иногда совсем не понятно, соответственно для составления таких материалов выдвигаются следующие требования:

- правильный отбор и деление учебного материала на небольшие порции;
- контроль знаний и умений (каждая порция учебного материала заканчивается контрольными вопросами или заданиями);
- переход к следующей порции материала лишь после верного ответа или ознакомления учащегося с характером допущенной ошибки или правильным ответом;
- обеспечение каждому ученику возможности работать со свойственной ему скоростью усвоения материала.

Данный вспомогательный электронный материал с тщательностью просматривается ведущим преподавателем с целью правильности объяснения необходимых понятий, доступности в изложении, возможности программного обеспечения для дальнейшего использования. Имеющийся материал значительно облегчит работу учителя информатики. Данная методика также много лет применяется на практике. Студентами создана серия электронных материалов, разработанных на лабораторных занятиях, в помощь учителю информатики. Многие материалы успешно используются учителями в школе.

Необходимо выделить ещё одно из средств обучения методике преподавания информатики – учебное задание. В силу различных причин, в том числе и временных ограничений, целесообразно формировать наборы типовых заданий, позволяющих организовывать индивидуальную работу со студентами и в то же время обеспечивать необходимую полноту и качество усвоения знаний, вырабатывая у студентов общие подходы, методологию решения проблем, связанных с обучением информатике в школе. Очень важно

научить будущих учителей правильно структурировать материал. Ведь любое сообщение, организованное каким-либо образом, воспринимается и запоминается намного легче.

Нельзя не затронуть вопрос, как научить будущих учителей правильно провести контроль знаний, умений и навыков. Для этого студенты должны знать, что к системе контроля предъявляются определённые требования и при её построении следует придерживаться основных принципов:

- **объективность** – является основным требованием и принципом организации контроля. Вопросы, задания, задачи и проекты должны быть обоснованы, а критерии оценки адекватны требованиям к уровню подготовки и возрастным особенностям учащихся;
- **открытая технология** – заключается в том, что оценивание учащихся осуществляется по единым критериям, которые должны быть обоснованы, известны заранее и понятны каждому учащемуся;
- **системность** – контроль должен быть непрерывным; быть естественной частью процесса обучения; обладать преемственностью, средствами, методами, формами контроля, которые будут подчинены единой цели.

При организации системы контроля учитывается полнота и всесторонность, регулярность и системность, объективность и валидность (мера соответствия методик и результатов исследования поставленным задачам). К этим требованиям следует добавить дифференцированный подход, развитие и использование функции самоконтроля.

*Полнота и всесторонность* обеспечиваются созданием комплекса проверочных, самостоятельных и контрольных работ по всем разделам и темам, включенными в учебную программу, с учетом требований к уровню подготовки.

*Регулярность и системность* связаны с соблюдением периодичности и непрерывности контроля на всех этапах обучения. Непрерывная система контроля позволяет отслеживать динамику усвоения знаний, обеспечивает оперативную коррекцию результатов обучения.

*Объективность и валидность* являются основными характеристиками системы контроля, их наличие гарантирует качество и повышает достоверность полученной в ходе контроля информации.

В процессе контроля осуществляется проверка усвоения и понимания терминов, принципов и понятий, смысла концепций, научных знаний и открытий, а также освоения практического опыта и приемов работы как специальных, так и общих, организации и планирования деятельности личной и в составе коллектива. Таким образом, реализуется триединая задача обучения: образование, развитие и воспитание.

Дифференциация контроля обусловлена необходимостью учитывать различие в способностях учащихся при восприятии и усвоении учебного материала. Дифференцированный подход реализуется путем создания многоуровневой системы контроля и разработки критериев оценки результатов обученности для каждого уровня. Один из приемов дифференциированного контроля заключается в том, что задания могут быть всем предложены одинаковые, а степень помочь учителя при их выполнении – различная. Очень важно научить будущих учителей увидеть, на что способен его ученик.

Большую роль в настоящее время играет способность учащегося самостоятельно оценивать свои знания и умения, корректировать их в соответствии с требованиями к уровню подготовки. Разумное сочетание контроля и самоконтроля усилит эффективность проводимых контролирующих мероприятий.

Система контроля, разработанная в соответствии с вышеперечисленными требованиями, должна использовать адекватные и разнообразные методы с учетом возрастных особенностей обучаемых, специфики изучаемого материала и других особенностей учебного процесса.

Целесообразное и разумное сочетание методов обеспечит продуктивность и эффективность системы контроля:

- непрерывное отслеживание результатов продвижения учащегося от незнания к знанию;
- оценка динамики развития каждого из них;
- регулярное проведение контролирующих мероприятий;
- разработка системы оценивания результатов и доведение ее до сведения учащихся;
- накопление информации по результатам контроля и анализ этих данных;

Система заданий, задач, проектов, контрольных и проверочных работ, тестов на разных этапах обучения в зависимости от опыта и созданной учебно-методической базы может быть взята за основу или «встроена» в модель контроля учителя. Она может быть адаптирована с учетом специфики курса информатики и требований к уровню подготовки, а затем расширена и дополнена новыми разработками.

Согласно выше сказанного, студентам можно предложить разработать контрольные и проверочные работы, тесты, задания, задачи и проекты, которые могут стать базовой частью системы контроля или «встраиваться» в уже существующую модель. Кроме традиционных составляющих текущего и итогового контроля, разработать варианты системы комплексного контроля, которая основана на логическом, проектном методах контроля знаний и умений.

Что касается вопросов дополнительных методик. На лабораторных занятиях студентам предлагается разработать: анализ олимпиадных задач; анализ программ факультативных курсов; проекты собственных программ для проведения факультативов; проекты воспитательных мероприятий по информатике.

Проведение занятий по таким схемам доказало свою эффективность. Накопленный материал студенты имеют возможность использовать при написании курсовых, дипломных работ и при прохождении педагогической практики.

Такая организация методической подготовки учителя информатики позволит обеспечить высокий уровень подготовки студентов к преподаванию информатики в условиях вариативности, гибкости, мобильности и адресности системы образования.

**М. И. Ефремова, О. И. Терещенко**

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ И ИХ ОСОБЕННОСТИ**

Решение задач – важная составная часть геометрии. С одной стороны, задачи являются основной формой закрепления теоретического материала, применения полученных знаний на практике, с другой – задачи способствуют более глубокому пониманию теоретических сведений, существенно расширяют кругозор учащихся. Нахождение путей решения задач развивает математическую инициативу и любознательность учащихся, способствует систематизации знаний, дает возможность учащимся убедиться в практической ценности знаний по математике. Научить учащихся решать задачи разных типов – сложная задача для учителя. Для ее реализации необходимо последовательно знакомить учащихся с методами решения задач, тщательно продумать систему задач к каждой теме. Решить задачу – означает определить искомые величины, сделать их известными или установить те зависимости, которые существуют между данными и искомыми величинами.

В школьном курсе геометрии можно, в основном, выделить четыре типа задач: задачи на вычисление; задачи на доказательство; задачи на построение; задачи на исследование.

Задачи на вычисление используются в базовой школе чаще, чем задачи на доказательство, на построение, на исследование.

Это можно объяснить определенными особенностями этих задач, так как задачи на вычисление – это: простейшая форма применения полученных знаний на практике; более, чем другие задачи, связаны с практической деятельностью человека; тесно связаны с материалом других учебных дисциплин; наиболее доступны для учащихся; отыскать путь решения задачи на вычисление легче, чем для задач других типов.

Среди задач на вычисление важное значение имеют нестандартные задачи. Такие задачи невозможно решить по какому-нибудь алгоритму. Но нестандартные задачи являются ценным дидактическим материалом на уроках обобщающего повторения. Приведем примеры таких задач.

Задача 1. Две высоты треугольника не меньше сторон, к которым они проведены. Определить углы треугольника.

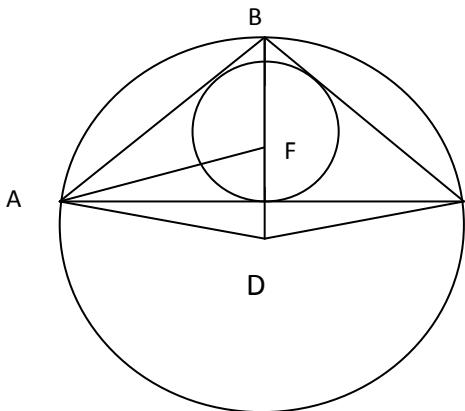
В этой задаче не видно непосредственных возможностей определить углы треугольника. Так как в условии задачи речь идет о неравенстве, то можно попытаться применить сведения, о том, что высота, проведенная к одной из сторон, не может быть больше ни одной из других его сторон.

Если данные высоты  $h_a$  и  $h_b$ , то получаем четыре неравенства:

$$h_a \geq a, h_b \geq b, h_a \leq b, h_b \leq a,$$

из которых следует что  $h_a = h_b = a = b$ . Следовательно, данный треугольник – прямоугольный и равнобедренный, поэтому углы равны  $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ .

Задача 2. Вычислить углы равнобедренного треугольника, у которого центры вписанной и описанной окружностей взаимно симметричны относительно основания треугольника.



Как и в первой задаче, здесь не видно непосредственных возможностей определить углы треугольника. Так как треугольник равнобедренный, то задача сводится к нахождению одного из его углов. Для нахождения этого угла нужно установить те связи, которые существуют между искомыми и данными элементами треугольника.

1. Согласно условия, имеем  $AD = BD = CD$ , следовательно,  $\Delta ABD$  и  $\Delta CBD$  – равнобедренные. Но  $BD$  – биссектриса  $\angle ABC$ , то  $\angle ABD = \angle CBD$ .

2.  $AF$  – биссектриса  $\angle BAC$ , следовательно,  $\angle BAF = \angle FAE = x$ .

3. По условию  $FE = ED, FD \perp AC$ . Следовательно

$\Delta AFE = \Delta ADE$  ( $FE = ED, AE$  – общий катет), поэтому  $\angle FAE = \angle DAE = x$ .

4. Имеем:  $\angle BAD = \angle ABD = 3x$ .

$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ$ , или  $2x + 6x + 2x = 180^\circ, x = 18^\circ$ .

$\angle BAC = \angle BCD = 36^\circ, \angle ABC = 108^\circ$ .

Задача 3. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg} \left( x^2 - 2x + 5^{x-2} + \arccos \frac{2y}{\pi} + \operatorname{tg}^2(y+z) \right) + \sqrt{-|2x^2 - 3x - 2|} = \sqrt{2x - x^2} + \frac{\pi}{4}.$$

1. Значение выражения  $\sqrt{-|2x^2 - 3x - 2|}$  можно вычислить в том случае, если  $-|2x^2 - 3x - 2| = 0$ , следовательно,  $x = 2, x = -\frac{1}{2}$ .

2. Если  $x = 0$ , то  $\sqrt{2x - x^2} = 0$ , при  $x = -\frac{1}{2}$  значение выражения  $\sqrt{2x - x^2}$  не определено.

3. При  $x = 2$  имеем  $\operatorname{arctg} \left( 1 + \arccos \frac{2y}{\pi} + \operatorname{tg}^2(y+z) \right) = \frac{\pi}{4}$ ,

откуда  $1 + \arccos \frac{2y}{\pi} + \operatorname{tg}^2(y+z) = 1$ , или  $\arccos \frac{2y}{\pi} + \operatorname{tg}^2(y+z) = 0$ .

Так как  $\arccos \frac{2y}{\pi} \geq 0, \operatorname{tg}^2(y+z) \geq 0$ , то последнее равенство равносильно системе

$$\begin{cases} \arccos \frac{2y}{\pi} = 0, \\ \operatorname{tg}^2(y+z) = 0. \end{cases}$$

Получим:  $y = \frac{\pi}{2}, z = k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

Итак,  $x = 2, y = \frac{\pi}{2}, z = k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

Задача 4. Найти два натуральных числа, кратных четырем, разность кубов которых равна четырехзначному числу, кратному 91.

Согласно условия задачи,

$$x = 4m, y = 4n, x^3 - y^3 = 91k; (4m)^3 - (4n)^3 = 91k;$$

$$64(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 91k, k = 64p.$$

$$64(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 91 \cdot 64p; \text{ где } p = 1;$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 91.$$

Имеем две системы:

$$a) \begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + xy + y^2 = 91. \end{cases}$$

Следовательно,  $x = 6, y = 5$ .

$$b) \begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + xy + y^2 = 13. \end{cases}$$

$x^2 + xy + y^2 = (x - y)^2 + 3xy = 49 + 3xy > 13$ . Система не имеет решений. Итак,  $x = 6, y = 5$ .

Задача 5. Наибольший общий делитель двух трехзначных чисел  $m$  и  $n$  равен 6, а наименьшее общее кратное их является шестизначным числом. Определить знак числа  $\operatorname{tg} \frac{m}{350}$ .

1. Имеем  $m = 6m_1$ ,  $n = 6n_1$ , где  $HOD(m_1, n_1) = 1$ .

2. Пусть  $HOK(m, n) = a$ , тогда  $HOD(m, n) \cdot HOK(m, n) = m \cdot n$ ,  $6 \cdot a = 6m_1 \cdot 6n_1$ , где  $a$  – число шестизначное.

3. Так как  $n = 6n_1$ , то  $a = n \cdot m_1$ . Так как  $n$  – трехзначное число, то и  $m_1$  – трехзначное, кроме того

$m = 6m_1$  – трехзначное, следовательно,  $600 \leq m < 999$ , или

$$\frac{600}{350} \leq \frac{m}{350} < \frac{999}{350}, 1\frac{5}{7} \leq \frac{m}{350} < 2\frac{299}{300},$$

$$\text{но } 1\frac{5}{7} \approx 1,7 > \frac{\pi}{2} \approx 1,57; 2\frac{299}{300} < \pi.$$

Поэтому,  $\frac{\pi}{2} < \frac{m}{350} < \pi$ , откуда  $\operatorname{tg} \frac{m}{350} < 0$ .

Задача 6. Решить уравнение:

$$2x + 1 + x\sqrt{x^2 + 2} + (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 0.$$

1. Область допустимых значений  $x \in R$ .

2. Введем новые переменные:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2} &= u, u > 0, \\ \sqrt{x^2 + 2x + 3} &= v, v > 0. \end{aligned}$$

$$3. \quad x^2 + 2 = u^2, x^2 + 2x + 3 = v^2, \text{ следовательно, } x = \frac{v^2 - u^2 - 1}{2}.$$

$$4. \quad \text{Имеем } v^2 - u^2 + \frac{v^2 - u^2 - 1}{2} \cdot u + \left(\frac{v^2 - u^2 - 1}{2} + 1\right) \cdot v = 0. \text{ Получим}$$

$(v - u)(u + v + 1)^2 = 0$ . Откуда следует, что  $v - u = 0$ ,  $(u + v + 1 \neq 0)$ ,  $x^2 + 2 = x^2 + 2x + 3$ ,

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Задача 7. Решить уравнение:  $x^4 - 2\sqrt{7}x^2 + x + 7 - \sqrt{7} = 0$ .

Пусть  $t = \sqrt{7}$ ,  $t > 0$ , тогда уравнение примет вид

$$x^4 - 2tx^2 + x + t^2 - t = 0, \text{ или } t^2 - t(1 + 2x^2) + x + x^4 = 0,$$

$$t = \frac{1+2x^2}{2} \pm \frac{|1-2x|}{2}, \text{ тогда } \sqrt{7} = \frac{1+2x^2}{2} \pm \frac{|1-2x|}{2}. \text{ Решив это уравнение относительно } x, \text{ получим корни данного уравнения:}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{7}}}{2}, x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}.$$

Задачи на вычисление могут сыграть важную роль не только для развития логического мышления учащихся, но и для формирования навыков всестороннего изучения той или иной темы, для становления математической любознательности, творческого мышления, последовательности в рассуждениях, для формирования критического отношения к своей деятельности.

**Л. А. Иваненко, Л. С. Актемирова**

## **СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В АМЕРИКАНСКОЙ ШКОЛЕ**

Одним из эффективных способов осуществления образовательного процесса является применение позитивного опыта других стран и умение учиться на чужих ошибках. В Республике Беларусь так же, как и в других странах, на протяжении более двадцати лет предпринимались попытки изменить существующую систему образования, трансформировав ее по примеру других стран, в частности, США. В систему образования все чаще внедряют западные технологии обучения. К примеру, проводимые с конца 1960-х годов общенациональные тесты в американских школах стали аналогом централизованного тестирования в нашей стране.

Образование в Соединенных Штатах считается показательным для всего мира. В США существует своя система образования, складывавшаяся не одно столетие, практически ничем не похожа на системы других государств, поэтому она и представляет интерес.

Американское образование вполне демократично. Это значит, что на федеральном уровне не создано четких шаблонов для всей системы. А поэтому любая школа способна устанавливать собственные правила. Порой это закрепляется на местном уровне.

Вся образовательная американская структура обладает собственным разделением. Школьные годы в Соединенных Штатах начинаются с пяти лет. В таком возрасте открывается для детей начальная школа. До пятого или шестого класса – начальная школа. После этого можно претендовать на среднее образование. Потом еще несколько лет высшей школы.

Отличительной чертой американской системы образования является принцип равенства в обучении. Иными словами, математика для всех означает, что при соответствующей организации процесса обучения программу школьной математики может освоить каждый учащийся. Одним из главных моментов принципа равенства является учет феномена множественности культур в математическом образовании США. Среди множества возможных средств реализации принципа равенства в обучении школьной математике, представленных в исследованиях по данной проблеме в педагогике США, выделяются: использование элементов этноМатематики; включение культурно-исторических аспектов в процесс обучения математике; применение приемов «социокультурных» технологий обучения.

Другим немаловажным отличием американской системы образования является сам процесс обучения. Изучение гуманитарных и естественнонаучных дисциплин имеет блочный характер. Математика подразделяется на более чем 20 курсов, изучаемых в каждом полугодии средней и старшей школ, согласно уровню развития учащихся.

Американское общество стало уделять серьезное внимание математическому образованию, начиная с 60-х годов XX столетия после запуска первого советского спутника.

Реформы математического образования в США строятся на философской доктрине бихевиоризма. Согласно этой философии, суть обучения можно свести к схеме: "стимул-реакция". Это привело к тому, что существующая в школах США система стандартизованных тестов превращает обучение математике в простую лотерею: угадал – не угадал. Американские школьники не приучены долго думать над решением задачи или доказательством теоремы. Причем учителя математики не обременяют учащихся домашними заданиями, избегают строгих доказательств, предпочитают не давать учащимся сложных задач, заменяя их большим количеством однотипных, которые легко решаются одним способом, злоупотребляют тестами и превращают обучение математике в однообразный тренаж и подготовку детей к очередному тесту. Поэтому и не удивительно, что американские школьники "складывают овец с собаками, чтобы узнать возраст пастуха".

В последние годы американцы усиленно пытаются найти замену устаревшей философии. Их изыскания идут в направлении идей европейских психологов Ж.-Ж. Пиаже, Л.С. Выготского и др., в русле философии конструктивизма. Они идут к тем же идеям, на которых в основном построена наша отечественная педагогика и методика обучения математике.

Причинами такого изменения являются данные Третьего международного исследования по научно-математическому образованию (**TIMSS – Third International Mathematics and Science Study**, 1996), согласно которому, американские школьники по уровню математической

подготовки находятся в конце второй десятки стран-участниц международных обследований академических достижений. Согласно статистике, от 20 до 30% юных американцев, получивших формальное среднее образование, не обладают минимальными навыками письма, чтения, счета.

В 1989 году американскими учеными-педагогами был разработан Стандарт по математике с 1 по 12 класс школы. В 2000 году произошло его обновление. В первую очередь, стандарт призван определить нижнюю необходимую границу математической подготовки школьников. Кроме того, он нацелен на проектирование реальных целевых установок на перспективу и прогнозирование будущих результатов обучения математике. Исследования американских педагогов показывают, что одной из главных причин отставания в области математического образования является отсутствие у американских школьников понимания ценности и значимости математики в решении практических, реальных жизненных проблем. Большинство американских школьников видят в математике лишь однообразный тренаж по подготовке к тестам и бессмысленную зубрежку большого количества формул и теорем.

Стандарт-89 состоит из трех частей: процессуальная, содержательная и оценочная части. Процессуальная часть стандарта является общей для всех степеней американской школы: элементарной, или начальной (1–4 классы), средней (5–8 классы) и старшей (9–12 классы). Она содержит конкретизацию цели формирования математической грамотности по следующим четырем позициям: решение задач, коммуникативные умения, логическое мышление, прикладные умения.

Позиция «*решение задач*» предполагает формирование у школьников умений анализировать проблемную ситуацию, собирать необходимые данные для разрешения проблемной ситуации, формулировать проблему, использовать различные приемы решения задач (с акцентом на решении многошаговых и нестандартных задач), интерпретировать результат решения проблемы, обобщать решение для анализа и решения новой проблемы, проверять правильность решения.

Немаловажное значение составители стандарта придают развитию логического мышления учащихся, а именно: формированию умений индуктивного и дедуктивного рассуждения, умений и приемов визуального мышления, умений выдвигать гипотезы и строить предположения, оценивать аргументированные рассуждения (как других людей, так и свои собственные рассуждения), критического мышления, грамотного использования противоречий и контрпримеров.

Позиция «*прикладные умения*» очень близка по содержанию к позиции решения задач с одной лишь разницей – акцентом на интеграции математики с другими предметами. Эта позиция включает формирование умений находить и понимать внутрипредметные связи в курсе математики, формирование межпредметных умений учащихся, воспитание умений ценить роль математики в науке, культуре, искусстве и обществе, развитие элементов системного мышления при обучении математике, а именно – умений видеть целостную картину математики, а не отдельные ее фрагменты.

Содержательная часть стандарта варьируется в зависимости от ступени обучения. Стандарт начальной школы (1–4 классы) включает в себя следующие разделы: *Округление чисел, Число и счет, Целые числа, Действия над целыми числами, Элементы геометрии, Измерения, Элементарные основы статистики и вероятности, Дроби, Числовые закономерности и отношения*. Средняя степень американской школы (5–8 классы): *Числа и отношения, Числовые системы, Приближенные вычисления и округления, Закономерности и функции, Алгебра, Статистика и вероятность, Геометрия и измерения*. Стандарт математики для старших классов американской школы (9–12 классы) представлен следующими разделами: *Алгебра, Функции, Геометрия, Тригонометрия, Статистика, Вероятность, Дискретная математика, Начала анализа, Математические структуры*.

Как видно из приведенного перечня разделов содержательной части стандарта школьной математики США, он отличается от белорусской школьной программы по математике наличием нескольких дополнительных разделов: Статистики и вероятности, Дискретной математики (элементы теории графов и алгоритмов, матрицы и элементы линейного программирования) и Математических структур (элементы теории действительных и комплексных чисел, основы логики и теории групп, аксиоматических метод). Остальные разделы стандарта США и белорусской учебной программы в

той или иной степени аналогичны по содержанию. Стандарт оценивания состоит из трех частей: общее оценивание, оценка учебных достижений и оценка учебной программы.

При оценке умения решать проблемы особое внимание должно уделяться тому, как учащийся умеет анализировать проблемную ситуацию, формулировать проблему, применять различные приемы решения задач, интерпретировать результаты решения, обобщать полученное решение на другие задачи. Оценка прикладных умений должна осуществляться в процессе решения практических задач с использованием материализованных действий.

Составители нового стандарта (2000 года) попытались подойти к школьному математическому образованию не только с позиций содержания и процесса обучения, но и предприняли попытку проанализировать «внешкольные» аспекты: отношение общества (прежде всего, родителей) к математическому образованию, создание равных условий для получения математического образования всеми категориями обучающихся, независимо от их способностей, возраста, пола, родного языка, этнического и социально-экономического происхождения, влияние новых информационных технологий (компьютерных алгебраических систем, миникомпьютерных лабораторий, графических программных средств, интернета) на процесс обучения математике и др.

Эффективность любой реформы измеряется ее конечными результатами. К сожалению, стандарт и реформа-89 не принесли особых успехов американской школьной математике. В качестве главной причины этого неуспеха является оторванность основных положений стандарта-89 от практики американской школы, а также недостаточный уровень профессиональной подготовки учителей. В Америке 80% школьных учителей математики не имеют никакого понятия о дробях: не могут сложить половину и треть, не знают даже, что больше, половина или треть.

В США в июне 1999 года решением министра образования была создана «Национальная комиссия США по преподаванию математики и естественных наук в XXI веке» под председательством первого американского астронавта Дж. Гленна. Осенью 2000 года комиссия Гленна выработала документ под названием «Пока еще не поздно». Главная идея документа такова: страна, которая хочет адекватно отвечать вызовам времени, должна опираться в первую очередь на хорошее математическое и естественнонаучное образование – иначе у этой страны нет будущего.

В итоге в настоящее время в США главный вектор реформ направляют в сторону усиления математического и естественнонаучного образования.

Проводя реформирование системы образования, необходимо учитывать как успехи, так и неудачи других стран. Существующая в Республике Беларусь система образования имеет богатый положительный опыт. Гармоничное внедрение положительного опыта передовых промышленно развитых стран в систему образования Республики Беларусь позволит ей развиваться и выйти на более высокий уровень.

### Литература

1. Чошанов, М.А. Америка учится считать: инновации в школьной математике США / М.А. Чошанов. – Рига: Эксперимент, 2001. – 212 с.
2. National Council of Teachers of Mathematics. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. – Reston, VA: Author, 1989.
3. Asher, M. Ethnomathematics: A Multicultural View of Mathematical Ideas / M. Asher. – Pacific Grove, GA: Brooks/Cole, 1991.
4. Krause, M. Multicultural Mathematics Materials / M. Krause. – Reston, VA: NCTM, 1983.
5. Zaslavsky, C. Multicultural Mathematics: Interdisciplinary Cooperative Learning Activities / C. Zaslavsky. – Portland, Maine: J. Weston Walch Publ, 1993.
6. Arter, J. Understanding the Meaning and Importance of Quality Classroom Assessment / J. Arter. – Portland, OR: NREL, 1990.
7. DeFina, A. Portfolio Assessment / A. DeFina. – Jefferson City, MO: Scholastic Professional Books, 1992.
8. Johnson, N. Portfolios: Clarifying, Constructing, and Enhancing / N. Johnson, L. Rose. – Lancaster, PA: Technomic, 1997.
9. Димиев, А. Классная Америка / А. Димиев. – Казань: Парадигма, 2008. – 80 с.

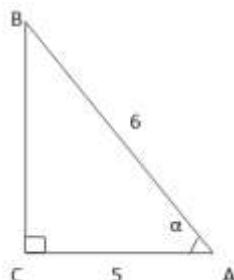
## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД ПРИ РЕШЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Одной из важнейших целей современного математического образования является воспитание личности, умеющей нестандартно мыслить, осуществлять вариативный подход к решению жизненно важных проблем. Умение решать задачу различными методами является одним из признаков хорошей математической подготовки. Традиционно выделяют алгебраический и геометрический методы решения задач. Исторически они развивались в тесной взаимосвязи, благодаря которой в математике были сделаны многие открытия. Решение многих геометрических задач может быть сведено к решению систем алгебраических уравнений. Однако менее заметны геометрические идеи, лежащие в основе решения ряда алгебраических задач: на вычисление наибольших и наименьших значений некоторых выражений, решение уравнений и неравенств. Основное преимущество геометрического метода в его наглядности. Он позволяет увидеть то, что в алгебраическом методе скрыто за аналитическими выкладками.

Школьный курс геометрии является уникальным учебным предметом, в котором заложены богатейшие возможности развития логического мышления и пространственного воображения. Однако его потенциал на уроках алгебры практически не задействован. Решение многих математических задач аналитическим путем довольно трудоемко. Геометрический метод позволяет облегчить решение задачи за счет использования наглядных представлений.

При проведении факультативных занятий по математике с учащимися 11 класса УО «Гимназия г. Калинковичи» мы широко практикуем геометрический метод решения задач. Содержательные связи между курсами алгебры и геометрии позволяют интегрировать их методы при решении задач. На занятиях рассматриваем, какие методы решения алгебраических задач могут быть интерпретированы геометрически. Приведем некоторые из них.

*1. Вычисление обратных тригонометрических функций без применения формул тригонометрии.*



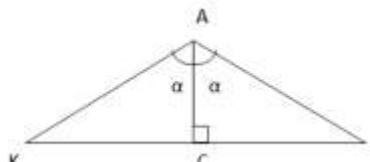
$$1.1. \text{ Вычислить } 10\sqrt{11} \operatorname{tg} \left( \arccos \frac{5}{6} \right).$$

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник. По условию задачи  $\arccos \frac{5}{6}$ . Следовательно, угол  $\alpha$  таков, что  $\cos \alpha = \frac{5}{6}$ .

То есть, прилежащий катет равен 5, гипотенуза – 6. По теореме Пифагора найдём  $BC$ .  $BC = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$ ;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{11}}{5}. \text{ Находим } 10\sqrt{11} \operatorname{tg} \left( \arccos \frac{5}{6} \right) = 10\sqrt{11} \frac{\sqrt{11}}{5} = 22.$$

$$1.2. \text{ Вычислить } 32 \cos(2 \arccos \frac{1}{4}).$$



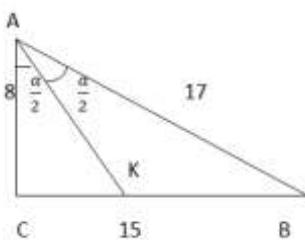
Аналогично предыдущему примеру рассматриваем прямоугольный треугольник  $ACB$ . Выясняем, что  $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ .

Следовательно,  $AC = 1$ ,  $AB = 4$ . По теореме косинусов из  $\Delta ABK$  находим  $CB = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$ .

$$KB^2 = AK^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AK \cos 2\alpha; (2\sqrt{15})^2 = 16 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 2\alpha;$$

$$\text{поэтому } \cos 2\alpha = \frac{32 - 60}{32} = -\frac{28}{32};$$

$$1.3. \text{ Найдите значение выражения: } 5 \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \arcsin \frac{15}{17} \right).$$



Аналогичным образом выясняем размеры прямоугольного треугольника. Находим  $AC = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = 8$ ; по свойству биссектрисы  $\frac{CK}{KB} = \frac{8}{17}$ ;  $CK + KB = 25$  частей. Одна часть равна  $\frac{3}{5}$ .

$$CK = 8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{5}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{CK}{8} = \frac{24}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}; \text{ получаем}$$

$$5 \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \arcsin \frac{15}{17} \right) = 5 \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3.$$

## 2. Упрощение тригонометрических выражений.

### 2.1. Вычислить $\operatorname{tg} 22,5^\circ$ .

Рассмотрим равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB=BC, \angle B=45^\circ$ .

Из вершины А проведем высоту  $AK$ .

Пусть  $BK=AK=1$ .

$$AB = \sqrt{2} = BC;$$

$$KC = \sqrt{2} - 1$$

$$\operatorname{tg} 22,5^\circ = \frac{KC}{AK} = \frac{\sqrt{2} - 1}{1} = \sqrt{2} - 1$$

$$2.2. \text{ Доказать } \frac{1}{\sin^2 20^\circ} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 20^\circ} = 1;$$

Рассмотрим  $\Delta ABC$  – равнобедренный

$$AB=BC, \angle B=40^\circ$$

Проведём высоту  $AD$ .  $\angle DAC = 20^\circ$  Пусть  $DC=1$

$$\sin 20^\circ = \frac{DC}{AC} = \frac{1}{AC}; \quad \operatorname{tg} 20^\circ = \frac{1}{AD};$$

$$AC = \frac{1}{\sin 20^\circ}; \quad AD = \frac{1}{\operatorname{tg} 20^\circ};$$

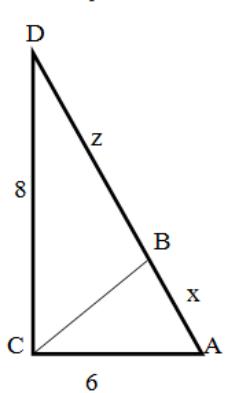
По теореме Пифагора  $AC^2 - AD^2 = 1$ .

### 1. Вычисление значения выражения.

3.1. Найдите значение выражения  $xy + yz$  от решения системы уравнения.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ y^2 + z^2 = 64 \\ y^2 = xz, \end{cases}$$

Если  $x > 0, y > 0, z > 0$ .

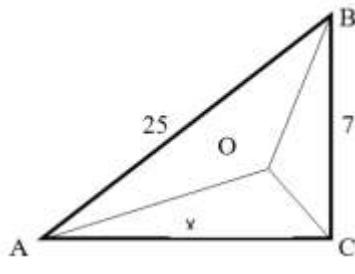


Решение. Можно рассмотреть в записи первого и второго уравнений теорему Пифагора для треугольников с катетами  $x$  и  $y$  и гипотенузой 6, катетами  $y$  и  $z$  и гипотенузой 8, причем катет  $y$  у них общий. Так как  $x > 0, y > 0, z > 0$ , то переменные  $x, y, z$  можно рассматривать как длины отрезков. Третье уравнение является свойством высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе. Значит, чертеж представляет собой два прямоугольных треугольника  $ABC$  и  $CBD$ , которые также составляют прямоугольный треугольник  $ACD$ ,  $C = 90^\circ$ , так как  $y^2 = xz$ . Можно заметить, что искомая сумма  $xy + yz = y(x + z)$  выражает собой удвоенную площадь треугольника  $ACD$ , катеты которого равны 6 и 8. Следовательно,

$$y(x + z) = 2S_{ACD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 48$$

3.2. Определить величину выражения  $\sqrt{3}xz + y(x+z)$ , если

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{3} + \frac{xy}{\sqrt{3}} = 625 \\ z^2 + \frac{y^2}{3} + \frac{yz}{\sqrt{3}} = 49 \\ x^2 + z^2 + xz = 576 \end{cases}$$



Решение. Все три уравнения представляют собой теорему косинусов для треугольников со сторонами  $x, z, \frac{y}{\sqrt{3}}$  и углом между двумя сторонами  $120^\circ$ . Все данные представим на рисунке.

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = 120^\circ$$

$$AO=x, OB=\frac{y}{\sqrt{3}}, OC=z. S_{ABO} + S_{ACO} + S_{BCO} = S_{ABC};$$

$$\frac{\sqrt{3}xz}{4} + \frac{xy}{4} + \frac{yz}{4} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24 \quad \sqrt{3}xz + y(x+z) = 336.$$

Рассмотренные примеры иллюстрируют лишь некоторые возможные геометрические подходы к решению алгебраических задач. Такая взаимная интеграция алгебраического и геометрического методов решения математических задач позволяет: формировать понимание взаимосвязи математических методов; обеспечить усвоение как алгебраических, так и геометрических знаний и умений; формировать умение осуществлять математическое моделирование; воспитывать математическую культуру у учащихся, так как интеграция алгебраического и геометрического методов решения задач позволяет сравнивать эти методы, выбирать наиболее рациональный из них и дает возможность получать иногда оригинальные, красивые решения.

#### Литература

1. Азаров, А.И. Методы решения тригонометрических задач / А.И. Азаров, В.И. Булатов. – Минск: Аверсэв, 2005. – 448 с.
2. Централизованное тестирование. Математика: полный сборник тестов / Респ. ин–т контроля знаний М–ва образования Респ. Беларусь. – Минск: Аверсэв, 2011. – 228 с.

#### С. В. Игнатович

### САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ СТУДЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Современное стремительно развивающееся общество постоянно нуждается в учителе-профессионале, способном учиться самому, чтобы эффективно обучать и воспитывать других в непрерывно обновляющейся информационной среде. Это обуславливает то, что совершенствование специального педагогического образования требует развития современных инновационных технологий формирования у студентов профессиональных навыков и умений, являющихся неотъемлемым условием качественной подготовки учителя математики. Для развития и формирования этих навыков особенно важна самостоятельность, так как это именно то качество человека, которое характеризуется сознательным выбором действия и целеустремленностью в его осуществлении. Без достаточного уровня самостоятельности студентов в обучении немыслимо глубокое и прочное усвоение знаний.

Самостоятельность неразрывно связана с активностью, что в свою очередь является движущей силой в процессе познания. Недостаточность самостоятельности делает студента пассивным, тормозит развитие его мышления и, в конечном итоге, делает его неспособным к эффективному применению полученных им знаний, умений и навыков в будущем.

Особенно важна самостоятельность для развития различных профессионально необходимых умений студентов, в том числе, таких умений, как предупреждение математических ошибок, затруднений в усвоении математических знаний, в процессе формирования практических навыков и умений, которые во многом обусловливают эффективность будущей профессиональной деятельности обучающихся. К таким умениям мы, прежде всего, относим: 1) умение подбирать упражнения по данной теме таким образом, чтобы при их выполнении у учащихся формировались либо совершенствовались вычислительные навыки и навыки выполнения тождественных

преобразований; 2) умение обобщать и систематизировать изложение и закрепление учебного материала таким образом, чтобы максимально включить в работу логическое мышление учащихся, добиться от учащихся правильного восприятия предлагаемой им информации; 3) умение анализировать имеющуюся учебную и дополнительную литературу по математике с целью отбора ее для плодотворной самостоятельной работы с ней учащихся; 4) умение организовать устные ответы учащихся для формирования у них речевой математической грамотности; 5) умение проводить выполнение заданий у доски так, чтобы учащихся, работающих как у доски, так и в своих тетрадях, формировались навыки правильного оформления решений; 6) умение подвести учащихся к необходимости выполнения рисунка, соответствующего условию решаемой задачи, и проведения измерений так, чтобы учащиеся осознали насколько важна точность и аккуратность иллюстрации решения.

Известно, что любые умения могут формироваться и развиваться только в процессе самостоятельной деятельности студентов. Без достаточно развитой самостоятельности нет полноценных умений, а без развитых на должном уровне умений никакая самостоятельность не принесет большой пользы в любом деле.

В процессе обучения математике учащиеся выполняют самые разнообразные действия учебно-познавательной деятельности. К основным из них можно отнести следующие: вычисления, т. е. счет и арифметические действия с числами; преобразования числовых и буквенных выражений; построения геометрических фигур; измерения геометрических величин; запись чисел, знаков, числовых и буквенных выражений, алгоритмов выполнения действий; рассуждения при решении задач, доказательстве теорем, использовании математических терминов и определений, аксиом; проговаривание математических терминов, обозначений, числовых и буквенных выражений; слушание объяснений учителя; использование учебников и дополнительной математической литературы. Согласно этому можно выделить следующие основные ошибки учащихся по математике: вычислительные ошибки; ошибки в преобразованиях; ошибки в геометрических построениях; ошибки в измерениях; ошибки в математических записях; логические ошибки; речевые ошибки; ошибки, связанные с неумением учащихся правильно воспринимать предлагаемую им информацию; ошибки, вызванные неумением учащихся работать самостоятельно с учебником или с дополнительной литературой.

Деятельность учителя, а учителя математики в особенности, направленная на прогнозирование затруднений в усвоении теоретического материала, а также ошибок учащихся в решении задач и предупреждение этих ошибок в будущем, имеет в настоящее время, когда перед всеми отраслями науки и производства стоят задачи повышения качества, огромное значение. Важнейшая задача обучения, которая стоит перед школой и вузом в рамках повышения уровня знаний и практических умений выпускников, – преодоление неуспеваемости. Это требует от учителя математики умения предвидеть основные трудности, с которыми могут столкнуться ученики в процессе обучения. В научных трудах психологов и педагогов достаточно глубоко проанализированы математические ошибки школьников, а также причины этих ошибок, способы и методы их предупреждения (А. К. Артемов [1], В. П. Беспалько [2], Ю. М. Колягин [4], В. А. Крутецкий [5], О. Н. Пирютко [6], А. Д. Семушин [7], О. И. Терещенко [8], Г. Штейнгауз [9]) и др.

Предвидение учителем трудностей усвоения школьниками учебного материала дает большие возможности в выборе эффективных методов сообщения знаний, в разработке методических приемов, способствующих предупреждению возможных затруднений. Не случайно многие психологи, дидакты, методисты, учителя-практики подчеркивают, что знание особенностей усвоения учащимися учебного материала, в том числе ошибок, допускаемых учащимися, является необходимым условием разработки методики обучения. Поэтому так важно подготовить будущих учителей математики к такой работе, познакомить их с условиями, способствующими уменьшению количества математических ошибок учащихся и, таким образом, минимизировать затруднения школьников в усвоении нового учебного материала.

К условиям, способствующим уменьшению количества ошибок учащихся по математике и позволяющим учителю в определенной степени предупреждать их появление, мы относим: глубокое и прочное усвоение математической теории; методика учета знаний; тесная связь теории с практикой; систематическое повторение и закрепление ранее пройденного учебного материала при изучении новых тем; владение математической речью; аккуратность в

записях; уверенность в своих знаниях; предупреждение учащихся о наиболее часто встречающихся ошибках.

Глубокое и прочное усвоение математической теории является одним из главнейших условий предупреждения ошибок учащихся по математике. В курсе математики имеется система математических понятий, а также связей между ними. При установлении этих связей в аксиомах, в процессе доказательства теорем, в решении задач учащимся постоянно приходится самостоятельно использовать определения понятий. Правильное формирование понятий у студентов математических специальностей, знание и точное понимание определений является непременным условием высокого уровня профессиональной подготовки будущего учителя математики, а впоследствии и глубоких, прочных знаний его учеников.

Следует отметить, что различные связи между теми или иными математическими понятиями отражены в аксиомах и теоремах, твердое знание и понимание которых необходимо как для решения практических задач, так и для последующего эффективного изучения теоретического материала. Поэтому очень важно добиться от студентов четкого понимания теорем и их доказательств. Как показывает накопленный педагогический опыт, студенты более легко воспроизводят доказательства теорем, меньше допускают ошибок в процессе самостоятельного доказательства, если при изучении теорем преподаватель обращает внимание на метод доказательства. Например, в процессе изучения той или иной теоремы, полезно обратить внимание студентов на то, что если в прямых теоремах рассмотрены все взаимно исключающие случаи, то обратные теоремы всегда справедливы и легко доказываются методом от противного.

Зачастую в процессе преподавания возникает ситуация, когда студент хорошо знает теоретический материал, но испытывает затруднения в самостоятельном его применении при решении практических задач. Это говорит о том, что у студента не активизируются те знания, которые необходимы для решения данной задачи, несмотря на их наличие. Другими словами, обучающийся не научился анализировать условия и заключения, не научился сопоставлять их и преобразовывать так, чтобы сблизить друг с другом.

Для устранения этой проблемы большие возможности дает повторение ключевых моментов пройденного материала. Например, при изучении темы “Исследование функции” в курсе математического анализа, чтобы подчеркнуть связь между основными понятиями, полезно повторить со студентами определения четной, нечетной, периодической, непрерывной функций. Целесообразно также вспомнить основные моменты в процессе отыскания области определения функций. Такая работа весьма полезна для развития математической речи студентов, систематизации их математических знаний и формирования у них уверенности в имеющихся знаниях.

Важно добиться, чтобы к концу обучения в вузе среди выпускников не осталось студентов, которые бы не овладели навыками и методами установления связей между объектами и явлениями в рассматриваемых процессах. Если студент будет владеть этими навыками, то он быстро сможет отыскать те связи, которые приближают его к решению задачи, и сможет в будущем научить этому своих учеников. Если же у него таких навыков нет, то вообще цель профессиональной подготовки будущего учителя математики в вузе, а впоследствии математической подготовки школьников, на наш взгляд, будет достигнута не в полной мере.

Формированию приемов установления связей способствует самостоятельное решение простейших задач на доказательства, поставленное сразу же за изученным материалом. В таких задачах, прежде всего, надо уметь рассмотреть предмет с различных точек зрения, заметить наличие условий, позволяющих воспользоваться свойствами либо определением, теоремой либо аксиомой. Тот факт, что зачастую эти задачи просты и следуют за только что изученным материалом (и студенты в большинстве своем об этом знают), не снижает ценности выполнения такого рода заданий. На таких задачах студенты приобретают навыки самостоятельного оперирования полученными теоретическими знаниями, самостоятельного обоснования своих утверждений в решении в дальнейшем более сложных задач.

Известно, что глубина и прочность усвоения учебного материала, а также уровень сформированности практических умений и навыков в значительной степени зависят от того, насколько активно студенты участвуют в приобретении знаний в процессе обучения. Многое в этом плане зависит от применяемой методики учета знаний, системы контроля уровня достижения задаваемых целей обучения. Хорошо поставленный учет знаний мобилизует студентов на систематическую активную самостоятельную работу. Поэтому

совершенствование системы контроля знаний и умений является одним из необходимых условий формирования навыков предупреждения появления математических ошибок.

Преподавателям практически на каждом занятии приходится обнаруживать и исправлять ошибки, многие из которых носят случайный характер и могли бы быть устраниены самими студентами, если бы у них на должном уровне было сформировано умение контролировать себя, ход своих рассуждений при решении задач. Самоконтроль является одним из важных факторов, обеспечивающих эффективность самостоятельной деятельности студентов. Назначение его заключается в своевременном обнаружении уже совершенных ошибок. Прослеживается прямая зависимость между степенью владения студентом навыками самоконтроля и уровнем его самостоятельности. [3]

К большому сожалению, следует констатировать тот факт, что современные выпускники школ поступают в высшие учебные заведения с низким уровнем умений самостоятельно работать. Об этом свидетельствуют результаты тестирования и контрольных работ, экзаменов и зачетов, проводимых нами среди студентов физико-математического факультета, факультета технологии, инженерно-педагогического, биологического и филологического факультетов УО МГПУ им. И.П. Шамякина в рамках исследования проблемы предупреждения математических ошибок студентов. Таким образом, встает первоочередная задача разработки современных методик обучения, направленных на формирование умений и навыков самостоятельной работы студентов.

В связи с этим нельзя переоценить роль математических упражнений как средства формирования и развития навыков и умений самостоятельной деятельности студентов в процессе обучения. Объясняется это тем, что выполнение упражнений в процессе преподавания математики является одним из основных видов выполняемой студентами деятельности, при выполнении упражнений студенту приходится обдумывать условие задачи, подыскивая методы ее решения, что является важным элементом творческого процесса, следовательно, служит основой для развития необходимых профессиональных качеств будущего учителя.

Математические упражнения рассматриваются нами как многоаспектное методическое понятие, а именно: как средство усвоения теоретических знаний; носитель основных практических навыков и умений; способ организации и управления учебно-познавательной и исследовательской деятельностью студентов; одна из форм обучения; средство контроля над усвоением содержания обучения.

Как известно, способом задания упражнений в обучении математике являются задачи. Под задачей мы будем понимать некоторый объект мыслительной деятельности, содержащий требования, а также условия, при которых это требование должно быть выполнено.

При проведении практических занятий одна из первоочередных задач состоит в том, чтобы не просто разобрать со студентами решения задач, а научить их глубже и основательнее вникать в содержание изучаемого теоретического курса, вести самостоятельные размышления и находить рациональные подходы к выполнению задания. При решении этой задачи перед преподавателем встает масса вопросов: как заинтересовать студентов изучаемым материалом; как построить преподавательскую деятельность так, чтобы студенты самостоятельно выполняли упражнения на практических занятиях и в домашних заданиях; как научить студентов творчески подходить к выполнению упражнений. В связи с этим при подборе упражнений по той или иной теме в первую очередь необходимо продумать следующее: связь лекционного курса и практических занятий; подбор задач по данной теме, а также пояснений к их решениям; постановка целей перед студентами при изучении того или иного материала; практическое применение изучаемого материала; количество задач на конкретном занятии; исторические сведения, касающиеся изучаемого материала; возможные ошибки и способы их предупреждения.

Известно, что между лекционными и практическими занятиями должно быть четкое постоянное соответствие и взаимное дополнение. Целесообразно, чтобы практические занятия в некоторой степени развивали содержание лекционного материала, а также дополняли лекции теми аспектами теории, которые не были рассмотрены лектором по тем или иным причинам (например, из-за нехватки времени). При решении упражнений преподаватель может разбирать со студентами прикладные задачи, соответствующие изучаемому курсу, может и должен давать студентам необходимые разъяснения по теории, которую они недостаточно хорошо поняли на лекции или в процессе самостоятельного изучения.

При выполнении упражнений студенты должны прежде всего научиться искать пути рационального решения поставленной задачи и доводить эти решения до конца. Преподаватель при этом через подобранные упражнения, должен показать студентам процесс создания

решения задачи. Разобранная под руководством преподавателя задача в дальнейшем служит для студентов основой в творческом поиске решений типовых задач. Она облегчает студентам процесс нахождения рационального решения задачи, организует мысли студентов в нужном направлении, тем самым как бы задает алгоритм творческого процесса поиска решения.

При изучении некоторых, особенно сложных для восприятия, тем от студентов зачастую можно услышать вопрос: «Зачем нам это надо?». Преподавателю следует предпринять меры для того, чтобы такой вопрос предупредить. Для этого при изучении подобного рода материала полезно дать студентам подробные указания перед выполнением упражнений, чтобы помочь студентам преодолеть состояние безысходности, которое и вызывает появление таких вопросов. Бывает полезным также рассказать студентам и о практическом применении изучаемого материала в тех или иных отраслях народного хозяйства, а также привести исторические справки, соответствующие рассматриваемым вопросам, так как такие сведения значительно повышают интерес студентов к изучаемому материалу.

В процессе работы зачастую получается так, что на рассмотрение всех типов упражнений по данной теме не хватает времени, что приводит к необходимости быстрого решения задач на практических занятиях. Но в данном случае количество далеко не всегда перерастает в качество, а скорее наоборот. В спешке очень сложно научить студентов думать, так как студенты при этом не столько стремятся понять процесс поиска решения задачи, сколько спешат все записать. Лучше решить меньше задач, но добиться, чтобы решения были поняты всеми студентами. Ведь с течением времени в основном забываются теоретические сведения и готовые решения, сохраняется лишь гибкость ума и способность логически мыслить. А этого можно достичь лишь неторопливым, детально обдуманным, самостоятельно проанализированным решением задач той сложности, которая соответствует уровню знаний студентов. С таких задач и целесообразно начинать решение упражнений по новым темам, поскольку именно так можно создать благоприятную психологическую основу доступности изучаемого материала для обучающихся.

Итак, использование математических упражнений в процессе преподавания математики является наиболее эффективным способом организации самостоятельной работы студентов и позволяет в определенной мере преподавателю достичь поставленной перед ним цели – подготовить высококвалифицированного специалиста, способного творчески мыслить и готового к исследовательской деятельности, что отвечает запросам современной школы, работающей в условиях инновационного развития системы образования республики.

### **Литература**

1. Артемов, А.К. Об одной причине ошибок школьников по геометрии / А.К. Артемов // Математика в школе. – 1963. – № 6. – С. 23–25.
2. Беспалько, В.П. Основы теории педагогических систем / В.П. Беспалько. – Воронеж: Изд. ВГУ, 1977. – 198 с.
3. Игнатович, С.В. Самоконтроль как один из факторов предупреждения математических ошибок студентов // Теория и практика подготовки в вузе будущих учителей математики, физики и информатики: материалы Междунар. науч. конф., Мозырь, 19-20 окт. 2005 г. / Редкол: И.Н. Кралевич и др. – Мозырь: УОМГПУ, 2005. – С. 37 – 40.
4. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика / Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.
5. Крутецкий, В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1969. – 432 с.
6. Пирютко, О.Н. Математика: типичные ошибки на централизованном тестировании и экзамене / О.Н. Пирютко. – 2-е изд. – Минск: Аверсэв, 2006. – 192 с.
7. Семушин, А.Д. Активизация мыслительной деятельности учащихся при изучении математики / А.Д. Семушин. – М.: Просвещение, 1978. – 64 с.
8. Терещенко, О.И. Об ошибках абитуриентов при решении иррациональных уравнений / О.И. Терещенко, С.В. Игнатович, В.И. Богданович // Сборник научных трудов преподавателей физико-математического факультета: сб. науч. тр. / Моз. гос. пед. инст.; под ред. И.Н. Кралевич. – Мозырь, 2001. – С. 134–142.
9. Штейнгауз, Г. Сто задач / Г. Штейнгауз; пер. с пол. Г.Ф. Боярской, Б.В. Боярского. – 4-е изд. – М.: Наука, 1986. – 144 с.

## О КЛАССАХ ШУНКА $n$ -АРНЫХ ГРУПП

Особый класс алгебраических систем с перестановочными конгруэнциями образуют  $n$ -арные группы. Напомним [3], что система  $\langle X, (\ ) \rangle$  с одной  $n$ -арной операцией  $(\ )$  называется  $n$ -арной группой, если эта операция ассоциативна и в  $X$  разрешимо каждое из уравнений  $(a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n) = a$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . В монографии [3] отражено современное состояние теории  $n$ -арных групп и представлен большой идеиний и технический материал, делающий возможным проведение анализа результатов о конкретных классах  $n$ -арных групп. Долгое время тематика исследований по  $n$ -арным группам была в основном связана с получением  $n$ -арных аналогов известных групповых результатов и нахождением свойств  $n$ -арных групп, не имеющих своих прототипов в теории групп. И только в последние годы под влиянием глубоких результатов и ярких приложений теории классов групп появились работы, посвященные изучению многообразий, формаций и классов Шунка  $n$ -арных групп. Стала актуальной задача построения теории классов  $n$ -арных групп.

Основным объектом исследования в данной работе являются  $\tau$ -классы Шунка  $n$ -арных групп в произвольном классе  $n$ -арных групп. Множество всех классов Шунка конечных групп по включению образует решетку. Целью данной работы является построение примера  $\tau$ -класса Шунка  $n$ -арных групп в  $X$ , где  $X$  – некоторый непустой класс  $n$ -арных групп.

Вся терминология стандартна и заимствована из [1-5]. Пусть  $X$  – произвольный класс  $n$ -арных групп. Сопоставим с каждой  $n$ -арной группой  $G$  некоторую систему ее подгрупп  $\tau(G)$ . Мы будем говорить, следя [4], что  $\tau$  – подгрупповой  $X$ -функтор, если выполняются следующие условия: 1)  $G \in \tau(G)$  для любой  $n$ -арной группы  $G \in X$ , 2) для любого эпиморфизма  $\varphi: A \rightarrow B$ , где  $A, B \in X$  и для любых  $n$ -арных групп  $H \in \tau(A)$  и  $T \in \tau(B)$  имеет место  $H^\varphi \in \tau(B)$  и  $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$ .

Следя [5], мы обозначаем через  $M_G$  наибольшую (по включению) конгруэнцию  $\pi$  на  $G$  со свойством  $\pi M = M$ . Неединичная  $n$ -арная группа называется [1]  $\tau$ -примитивной, если у  $G$  имеется такая подгруппа  $M$ , что  $M \in \tau(G) \setminus \{G\}$  и  $M_G$  – нулевая конгруэнция на  $G$ . Будем говорить, что класс  $n$ -арных групп  $M$   $\tau$ -примитивно замкнут в  $X$ , если  $M \subseteq X$  и классу  $M$  принадлежит каждая такая группа из  $X$ , у которой все ее  $\tau$ -примитивные факторгруппы принадлежат  $M$ .

Следя [1],  $\tau$ -классом Шунка  $n$ -арных групп в  $X$  будем называть всякий гомоморф  $n$ -арных групп,  $\tau$ -примитивно замкнутый в классе  $n$ -арных групп  $X$ .

Теорема. Пусть  $F \subseteq X$  – класс всех таких  $n$ -арных групп, у которых индексы всех их  $\tau$ -подгрупп взаимно просты с данным натуральным числом  $n$ . Докажем, что  $F$  –  $\tau$ -класс Шунка.

Доказательство. Пусть  $\varphi: A \rightarrow B$  – эпиморфизм  $n$ -арных групп, где  $A \in F$ . И пусть  $\pi = \ker \varphi$ . Пусть  $\overline{M}$  –  $n$ -арная подгруппа, принадлежащая  $\tau(A/\pi) \setminus \{A/\pi\}$ . Тогда в  $A$  найдется такая  $n$ -арная подгруппа  $M \in \tau(A) \setminus \{A\}$ , что  $\pi M = M$  и  $\overline{M} = M/\pi$ . Пусть  $|A : M| = k$ . Поскольку  $A \in F$ , то  $(k, n) = 1$ , где  $n$  – некоторое натуральное число. Тогда

$$|A : M| = |A/\pi : M/\pi|.$$

Значит,  $|A/\pi : M/\pi| = k$ , то есть  $(|A/\pi : M/\pi|, n) = 1$ . Следовательно,  $A/\pi \in F$ .

Поскольку  $B \cong A/\pi \in F$ , то, следовательно,  $F$  – гомоморф  $n$ -арных групп.

Пусть теперь  $A/M_A \in F$  для всех  $n$ -арных подгрупп  $M \in \tau(A) \setminus \{A\}$ . Пусть  $M$  –  $n$ -арная подгруппа, принадлежащая  $\tau(A) \setminus \{A\}$ . Тогда  $M_A(M) = M$  и  $M/M_A \in \tau(A/\pi) \setminus \{A/\pi\}$ . Поскольку  $A/M_A \in F$ , то  $(|A/M_A : M/M_A|, n) = 1$ , где  $n$  – некоторое натуральное число. Следовательно,

$$|A/M_A : M/M_A| = |A : M|.$$

Следовательно,  $(|A : M|, n) = 1$ . Значит,  $A \in F$ . Таким образом, класс  $F$  –  $\tau$ -примитивно замкнутый в  $X$ . Значит,  $F$  –  $\tau$ -класс Шунка в  $X$ .

### Литература

- Ефремова, М.И. Решетки  $\tau$ -классов Шунка  $n$ -арных групп: препринт / М.И. Ефремова, А.Н. Скиба. – Гомель, ГГУ им. Ф.Скорины, 2002.– 23 с.
- Мальцев, А.И. Алгебраические системы / М.И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 392 с.

3. Русаков, С.А. Алгебраические  $n$ -арные системы: Силовская теория  $n$ -арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.
4. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
5. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 254 с.

**С. В. Капора, Е. В. Прокопович, В. С. Савенко, В. П. Басаргин**

## **УЛЬТРААКУСТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ**

Ультраакустика представляет собой область интенсивных научных и технологических исследований. Ввиду ее экстенсивного применения в научной и инженерной деятельности она привлекает внимание широкого круга студентов, преподавателей, исследователей, профессионалов в области неразрушающих испытаний (NDT), промышленников, инженеров по инструментарию, инженеров по программному обеспечению, ученых, занимающихся исследованиями свойств материалов, и представителей других профессий. Ультразвук, который по своей сути является механической волной, взаимодействует с веществами. Разнообразие типов волн, от продольных до поверхностных, позволяет использовать ультразвук во всевозможных аспектах. Прогресс в области сенсоров, электронного инструментария, компьютеров, улучшение знаний о физическом взаимодействии – все это способствовало совершенствованию экспериментальной ультраакустики. Ультраакустика начиналась с базового понятия звука в физике, а теперь она представляет собой обширную самостоятельную область с несколькими разделами и подразделами, которая привлекает интерес ученых и имеет огромную технологическую значимость.

Знание о наличии дефектов в микроструктурах имеет большое значение для оценки срока службы материала/компоненты в атомной, химической промышленности, обследованиях газопроводов до и во время их эксплуатации. При поставке компонентов/материалов именно NDT позволяет определить, какой из компонентов свободен от дефектов и соответствует той или иной требуемой микроструктуре. Как бы то ни было, для того, чтобы отслеживать старение материала в процессе эксплуатации, например, так называемую усталость, оценивать повреждения при ползучести и измерять остаточное напряжение, необходимо разрабатывать специальные методологии и процедуры.

Ультразвуковой контроль отличается многообразием методов, типов применяемых волн, широким диапазоном частот. Реализация его больших возможностей применительно к дефектоскопии конкретных видов изделий составляет задачу разработки методики контроля. В нее входят следующие основные вопросы: выбор схемы контроля – метода дефектоскопии, типа волн, поверхности, через которую вводят УЗ-волны,угла ввода [1].

Контроль физико-механических свойств материалов – одно из важных направлений неразрушающего контроля качества материалов, деталей, изделий и конструкций. Неразрушающий контроль позволяет перейти от выборочной проверки этих свойств на специально изготовленных образцах к их стопроцентному контролю на готовых изделиях без их разрушения или повреждения. Это повышает достоверность оценки качества продукции и сокращает расходы. Контроль акустическими методами основан на установлении взаимосвязи физико-механических, технологических, структурных характеристик материалов и изделий с акустическими характеристиками.

К основным физико-механическим свойствам материалов, определяемым акустическими методами, относят: упругие (модуль нормальной упругости, модуль сдвига, коэффициент Пуассона); прочностные (прочность при растяжении, сжатии, изгибе, кручении, срезе и др.); технологические (плотность, пластичность, влажность, содержание отдельных компонентов, гранулометрический состав и др.); структурные анизотропия материала, кристалличность или аморфность, размеры кристаллов, упорядоченность кристаллической решетки); размеры, форма и содержание включений, например графитных включений в чугуне; глубина поверхностной закалки и ряд других. Акустические методы позволяют оценивать только те свойства материала, которые влияют на условия возбуждения, прохождения, отражения и преломления упругих волн или на режимы колебаний ОК. Это скорости распространения волн различных типов, волновые сопротивления материалов, коэффициенты поглощении и рассеяния упругих волн, собственные

частоты конструкций, их добротность, механический импеданс, уровень обратного рассеяния, эффективность ЭМА-преобразования, нелинейные искажения волн.

Контроль физико-механических свойств акустическими методами основан на аналитических или корреляционных связях измеренных акустических параметров с оцениваемыми свойствами материала. Если контролируемое свойство имеет с измеряемым акустическим параметром четкую аналитическую связь, оно может быть определено с высокой точностью. Так, все три упругих постоянных материала однозначно определяются по измеренным значениям скоростей распространения продольной и поперечной волн. Точность такой оценки зависит от точности измерения указанных скоростей и может быть очень высокой.

Однако большинство физико-механических свойств (включая прочность) связаны с акустическими параметрами лишь корреляционными зависимостями, теснота которых определяется выбором измеряемого параметра (иногда нескольких), обеспечивающего наилучшую корреляцию с оцениваемой характеристикой материала. В этом случае пользуются тарировочными графиками, построенными на основе статистической обработки большого количества экспериментальных данных. При этом достоверность и точность оценки характеристик материалов ниже, чем при использовании аналитических зависимостей.

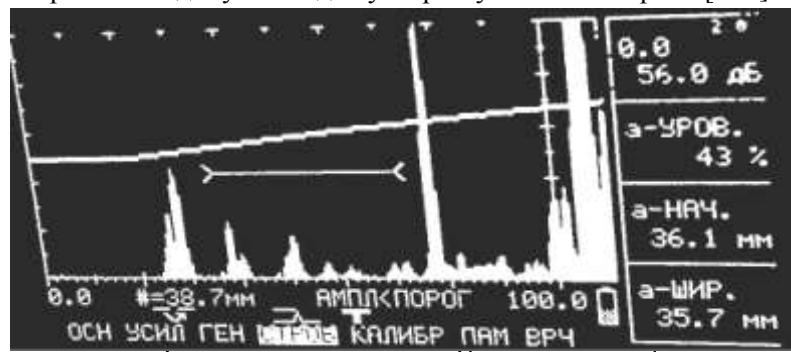
Тем не менее, контроль свойств материалов на основе их корреляционных связей с акустическими параметрами широко применяется на практике. Например, стандартизованы ультразвуковой метод контроля бетона, основанный на корреляции прочности со скоростью распространения упругих волн, и метод контроля качества абразивных инструментов по их собственным частотам [2].

Аппаратура УЗ-контроля обычно включает: ультразвуковые импульсные дефектоскопы с преобразователями, комплект стандартных образцов (эталонов), испытательные образцы, а также вспомогательные приспособления или устройства для соблюдения параметров контроля и сканирования. Ультразвуковой дефектоскоп предназначен для излучения УЗ-колебаний, приема эхо-сигналов, установления размеров выявленных несплошностей и определения их координат [3].

Исследования проводились на заготовке вала из Стали 40 поковка. Использовался датчик MSEB 4 с характеристиками: эффективная частота  $4\pm0,2$  МГц; размер пьезоэлемента  $3,5 \times 10$  мм; рабочая поверхность диаметром 16 мм; диапазон контроля по стали от 1 до 1500 мм; задаваемая скорость звука в материале объекта исследования 5198 м/с.

Для получения экспериментальных данных был использован прибор Krautkramer usm 35 с раздельно-совмещенным прямым датчиком MSEB 4. С помощью данного вида приборов возможно производить различного вида измерения и проводить контроль.

На рисунке 2 видны сигналы от донной поверхности и сигнал от поверхности дефекта. Путь, пройденный сигналом при ультразвуковом контроле  $S=79$  мм, а диаметр вала равен 80 мм. Данная погрешность допустима для ультразвукового контроля [4–5].



Сигнал от дефектной поверхности Сигнал от донной поверхности

56.0 дБ – усиление сигнала, а-УРОВ., а-НАЧ., а-ШИР. – характеристики строба

Рисунок 2 – Показания прибора usm 35 при ультразвуковом исследовании вала эхо-методом

### **Литература**

1. Балдев, Р. Применения ультразвука / Р. Балдев. – М.: Техносфера, 2006. – 576 с.
2. Ермолов, И.Н. Неразрушающий контроль / И.Н. Ермолов. – М.: Машиностроение, 2004. – 864 с.
3. Алешин, Н.П. Ультразвуковая дефектоскопия / Н.П. Алешин. – Минск: Выш. школа, 1987. – 271 с.
4. Троицкий, В.А. Ультразвуковой контроль: дефектоскопы, нормативные документы, стандарты по УЗК / В.А. Троицкий. – Киев: Феникс, 2006. – 224 с.
5. Техническое описание и инструкция по эксплуатации прибора kraftkramer usm 35 – 153 с.

**I. N. Ковальчук**

## **ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК НЕОБХОДИМЫЙ ИНСТРУМЕНТ ОРГАНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ**

Изменения, происходящие в современном обществе, в значительной степени диктуют необходимость пересмотреть место информационных технологий в учебном процессе школы.

Особенно актуальна проблема использования информационных технологий при обучении школьников математике. Роль математики как учебного предмета в структуре содержания общего среднего образования чрезвычайно велика. Математика является опорным учебным предметом, который дает общее представление о математике как науке, помогает овладеть математическими методами, обеспечивает качественное изучение дисциплин естественнонаучного цикла, позволяет развивать логическое и образное мышление учащихся.

Но изучение математики в настоящее время сопряжено с целым рядом особенностей развития школьного образования в нашей стране. В настоящее время на фоне падения интереса у школьников к математике как науке наблюдается рост приоритета гуманитарных наук. Кроме того, у школьников снизилась мотивация к учению в целом. В то же время современное состояние общества предъявляет все более высокие требования к уровню знаний и умений выпускников школы, качеству преподаваемого материала, уровню представляемой информации. Поэтому в образовательной деятельности, в том числе и по математике, необходима ориентация на:

- развитие у учащихся мотивации к учению;
- повышение познавательной активности учащихся на уроках математики;
- развитие умений жить и работать в качественно новой информационной среде, адекватно воспринимать её реалии и научиться пользоваться ею;
- связь обучения с окружающей жизнью;
- формирование умений исследовательской деятельности;
- индивидуализацию целей образования.

Решить эту проблему старыми методами невозможно. Информационные технологии – современный эффективный инструмент в руках педагога.

Информационные технологии в образовательной сфере – это аппаратно-программные средства, электронные средства обучения, базирующиеся на использовании вычислительной техники, которые обеспечивают хранение и обработку образовательной информации, доставку ее обучаемому [1].

Внедрение информационных технологий в образовательный процесс позволяет более эффективно и гибко работать с учебным материалом, переходить на новые методы обучения и тем самым является дополнительной возможностью повышения качества обучения учащихся. Современный урок математики должен синтезировать все лучшее, что связано с информационными технологиями. Необходимо выйти на такой уровень, чтобы использование информационных технологий в образовательном процессе способствовало решению образовательных, воспитательных, развивающих задач обучения.

Для успешного и целенаправленного использования в учебном процессе средств информационных технологий учителя должны знать общее описание принципов функционирования и дидактические возможности программно прикладных средств, а затем, исходя из своего опыта и рекомендаций, «встраивать» их в учебный процесс [2].

Электронные средства обучения – программные средства, в которых отражается некоторая предметная область, в той или иной мере реализуется технология её изучения

средствами информационно-коммуникационных технологий, обеспечиваются условия для осуществления различных видов учебной деятельности [3].

По своему методическому назначению электронные средства обучения можно подразделить на следующие виды:

- ✓ обучающие программные средства – обеспечивают необходимый уровень усвоения учебного материала;
- ✓ программные средства (системы) – тренажёры – обеспечивают отработку умений учащихся, осуществляют самоподготовку и используются при повторении или закреплении учебного материала;
- ✓ контролирующие программные средства – программы, предназначенные для контроля (самоконтроля) уровня овладения учебным материалом;
- ✓ информационно-поисковые, информационно-справочные программные средства – позволяют осуществить выбор и вывод необходимой информации (их методическое назначение – формирование умений учащихся по поиску и систематизации информации);
- ✓ моделирующие программные средства – предоставляют учащимся основные элементы и типы функций для моделирования определённой реальности (они предназначены для создания модели объекта, явления, процесса или ситуации с целью их изучения, исследования);
- ✓ демонстрационные программные средства – обеспечивают наглядное представление учебного материала, визуализацию изучаемых явлений, процессов и взаимосвязей между объектами;
- ✓ учебно-игровые программные средства – позволяют «проигрывать» учебные ситуации (например, с целью формирования умений принимать оптимальное решение или выработки оптимальной стратегии действия);
- ✓ досуговые программные средства – используются для организации деятельности учащихся во внеклассной работе.

Обозначены следующие ключевые аспекты использования электронных средств обучения в образовательном процессе:

- ✓ **мотивационный аспект**: электронные средства обучения создают условия для максимального учёта индивидуальных образовательных возможностей и потребностей учащихся, широкого выбора содержания, форм, темпов и уровня подготовки, удовлетворения образовательных потребностей, раскрытия творческого потенциала учащихся;
- ✓ **содержательный аспект**: электронные средства обучения дополняют учебник теми элементами, которые он реализовать не может, позволяют быстрее найти нужную информацию, оперировать ею, работать с наглядными моделями труднообъяснимых процессов;
- ✓ **учебно-методический аспект**: электронные средства обучения обеспечивают учебно-методическое сопровождение учебного предмета, так как их можно применять при подготовке к уроку; непосредственно на уроке (при объяснении нового материала, для закрепления усвоенных знаний, в процессе контроля знаний); для организации самостоятельного изучения учащимися дополнительного материала и т. д.;
- ✓ **организационный аспект**: электронные средства обучения могут быть использованы при классно-урочной, проектно-групповой, индивидуальной моделях обучения, во внеклассной работе;
- ✓ **контрольно-оценочный аспект**: электронные средства обучения позволяют осуществлять различные виды контроля: поурочный, тематический, промежуточный и итоговый.

Необходимо отметить, что использование электронных средств обучения в образовательном процессе значительно влияет на формы и методы представления учебного материала, характер взаимодействия между обучаемым и педагогом и соответственно на методику проведения занятий в целом. Вместе с тем электронные средства обучения не заменяют традиционные подходы к обучению, а значительно повышают их эффективность. Главное для педагога – найти соответствующее место электронных средств обучения в образовательном процессе [3].

Для определения состояния применения информационных технологий при организации обучения математике в школах Гомельской области было проведено анкетирование учителей математики школ г. Мозыря и Мозырского района и г. Калинковичи и Калинковичского района.

В анкетах учителя математики Гомельской области выделили следующие достоинства уроков с использованием информационных технологий:

Учителями выделены следующие достоинства уроков с использованием информационных технологий для учащихся:

- более наглядное и динамичное представление материала;
- оптимальный темп работы для каждого ученика;
- увеличение количества тренировочных заданий;
- оценка за работу выставляется ученику сразу;
- отслеживаются ошибки, допущенные учеником, и повторно отрабатывается недостаточно усвоенный материал;
- повышение мотивации учебной деятельности, поддержка интереса у ребенка, его активности на протяжении всего урока;
  - наличие больших возможностей для участия в коллективной, групповой и индивидуальной работе;
  - возможности для уровневой дифференциации обучения;
  - активизация психических процессов учащихся (восприятие, внимание, память, мышление).

В анкетах учителя отметили, что наиболее эффективно использование информационных технологий на уроках математики при:

- проведении устного счёта (возможность оперативно предъявлять задания и корректировать результаты их выполнения);
- изучении нового материала (иллюстрирование разнообразными наглядными средствами; мотивация введения нового понятия; моделирование);
- проверке фронтальных самостоятельных работ (быстрый контроль результатов);
- решении задач обучающего характера (выполнение рисунков, составление плана работы; отработка определенных навыков и умений);
- организации исследовательской деятельности учащихся (метод проектов).

Богатейшие возможности представления информации на компьютере позволяют изменять и неограниченно обогащать содержание образования, повышать интенсивность урока, индивидуализировать процесс обучения. Использование информационных технологий в образовательном процессе направлено на повышение эффективности и качества обучения учащихся [4].

Взяв за основу слова К. Ф. Гаусса о том, что «математика – наука для глаз, а не для ушей», можно сказать, что математика – это один из тех предметов, в котором использование информационных технологий возможно на всех типах уроков: изучения новых знаний и формирования новых умений; практического применения знаний, умений; обобщения и систематизации изученного; контроля и коррекции знаний, умений; комбинированные (смешанные).

Возможности использования информационных технологий на уроке зависят от содержания этого урока и цели, которую ставит учитель. Применять компьютерные программы можно на любом этапе урока. Основная задача учителя состоит в том, чтобы правильно организовать работу учащихся [2].

Установлено, что на уроках математики на этапе усвоения новых знаний информационные технологии могут быть использованы (форма использования):

- при историческом обзоре открытия того или иного математического факта (видеофильм, презентации в среде PowerPoint или Macromedia Flash, электронный учебник и др.);
- при изложении теоретического блока материала (видеофильм, презентации в среде PowerPoint или Macromedia Flash);
- для демонстрации наглядных схем и графиков функций и уравнений, алгоритмов решения уравнений и неравенств, изображений пространственных фигур, для демонстрации образцов решения ключевых задач (презентации в среде PowerPoint или Macromedia Flash, MathCad, ABCPascal и др.);
- для демонстрации алгоритмов построения графиков функций и уравнений, сечений многогранников (в среде PowerPoint или Macromedia Flash, MathCad, Microsoft Exel, 3DMax и др.);
- для демонстрации применения математических фактов в различных сферах деятельности (в среде PowerPoint или Macromedia Flash, Microsoft Exel, 3DMax и др.).

Использование информационных технологий при объяснении нового материала позволяет рассматривать вопросы математической теории в движении, способствует увеличению наглядности и выразительности излагаемого материала.

На этапе проверки понимания и закрепления знаний информационные технологии могут быть использованы (форма использования): 1) при организации математических диктантов (презентации в среде PowerPoint, электронный учебник); 2) при осуществлении

тестирования учащихся в индивидуальном режиме (обучающие программы; тестирующие программы, выполненные в среде PowerPoint; электронный учебник); 3) при осуществлении тестирования учащихся в групповом режиме (презентации, электронный учебник).

Тестовый контроль с помощью компьютера предполагает возможность быстрее и объективнее, чем при традиционном способе, выявить уровень знаний, умений и навыков обучающихся. Этот способ контроля в учебном процессе удобен и прост в использовании.

Возможны две формы организации тестов, которые условно можно назвать «выбери ответ из предлагаемых вариантов» и «напиши правильный ответ».

Организация теста по принципу «выбери ответ из предлагаемых вариантов» обеспечивает быстроту прохождения теста, так как не требует от учащегося особых навыков работы на компьютере. Для выдачи ответа достаточно нажать клавишу правильного ответа, выбрав его среди предложенных.

Организация теста по принципу «напиши правильный ответ» предполагает хорошую начальную подготовку учащегося как пользователя персонального компьютера. Выдача ответа осуществляется его набором и требует хорошего знания клавиатуры, в том числе «переключения на английский язык» и умения набирать формулы с помощью специальных программ.

Такой вид контроля позволяет за довольно короткое время урока проверить уровень знаний, умений и навыков поочередно у группы учащихся класса, когда остальные ученики выполняют другой вид работы. На следующих уроках тестирование проходят другие учащиеся, так что к заключительному уроку по теме пройти тестирование успевают все.

При организации итогового контроля знаний, умений и навыков учащихся информационные технологии могут быть использованы: для тестирования в индивидуальном режиме (тестирующая программа, «тренажеры», презентации в среде PowerPoint или Macromedia Flash, при использовании тестовых оболочек «Краб», «Тестер» и др.); для контроля в групповом режиме (тестирующая программа, «тренажеры», презентации в среде PowerPoint или Macromedia Flash, при использовании тестовых оболочек «Краб», «Тестер» и др.).

На этапе обобщения и систематизации знаний, умений и навыков учащихся информационные технологии могут быть использованы: для демонстрации обобщенных схем и алгоритмов решения уравнений и неравенств, графиков функций и уравнений (презентации в среде PowerPoint или Macromedia Flash, ABCPascal, Microsoft Exel и др.); при организации проектной деятельности учащихся (презентации в среде PowerPoint или Macromedia Flash, ABCPascal, Microsoft Exel и др.).

На факультативах по математике информационные технологии могут быть использованы: в виде презентаций занимательного характера; для демонстрации наглядных схем, графиков (презентации в среде PowerPoint); для построения графиков функций и уравнений, изображений пространственных фигур на плоскости и их сечений (в среде Macromedia Flash 8); при демонстрациях фрагментов электронного учебника; для демонстрации обобщенных схем и алгоритмов решения уравнений и неравенств, графиков функций и уравнений (презентации в среде PowerPoint); при осуществлении тестирования учащихся в индивидуальном режиме (тестирующая программа выполненная в среде PowerPoint, электронный учебник); при осуществлении тестирования учащихся в групповом режиме (презентации, электронный учебник); при организации проектной деятельности.

**Выводы.** Информационные технологии представляют необходимый инструмент организации обучения математике в средней школе, так как позволяют изменять и неограниченно обогащать содержание математического образования, повышать интенсивность урока, индивидуализировать процесс обучения, повышать интерес учащихся к математике, развивать логическое мышление; расширяют возможности передачи информации и контроля знаний; обеспечивают эмоциональную насыщенность обучения математике и связь учебного материала с окружающей жизнью.

#### Литература

1. Полат, Е.С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования / Е.С. Полат. – М.: Омега-Л, 2004. – 215 с.
2. Загвязинский, В.И. Теория обучения: современная интерпретация: учеб. пособие для студ. пед. учеб. заведений / В.И. Загвязинский. – М.: Изд. центр «Академия», 2001. – 192 с.
3. Инструктивно-методическое письмо по использованию электронных средств обучения в образовательном процессе// Математика: проблемы выкладания. – 2005. – № 9. – С. 6–16.
4. Запрудский, Н.И. Современные школьные технологии/ Н.И. Запрудский. – Минск: Сэр-Вит, 2003. – 288 с.

**Ж. В. Колядко, В. В. Шепелевич**

## **КОГЕРЕНТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОРТОГОНАЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ТЕМНЫХ ПУЧКОВ В КУБИЧЕСКОМ ФОТОРЕФРАКТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ**

Интерес к исследованию взаимодействия солитоноподобных световых пучков в фоторефрактивных кристаллах связан с перспективами использования их для адресной локализации световых пучков и переключения оптических каналов.

Рассмотрим когерентное взаимодействие темных одномерных пучков с линейными ортогональными поляризациями, распространяющимися в направлении оси  $z$ , перпендикулярной входной плоскости кубического поглощающего оптически активного фоторефрактивного кристалла толщиной 25 мм среза ( $\bar{1}\bar{1}0$ ).

Для описания взаимодействия темных пучков в кубическом поглощающем оптически активном фоторефрактивном кристалле класса 23 будем использовать следующее нелинейное уравнение для медленно изменяющегося комплексного вектора амплитуды напряженности электрического поля одномерного светового пучка  $\vec{A}(x,z)$  (см., напр., [1]–[3])

$$i \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_0} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} - \frac{k_0 n_0^3}{2} \frac{(I_\infty + I_d)}{I_d + I(x,z)} (\vec{A} \hat{r} \vec{E}_0) + i\rho [\vec{e}_z, \vec{A}] + i\alpha \vec{A} = 0, \quad (1)$$

где  $n_0$  – невозмущенный показатель преломления кристалла;  $k_0$  – длина волнового вектора световой волны в вакууме;  $I(x,z)$  – интенсивность светового пучка;  $\rho$  – удельное вращение плоскости поляризации в кристалле;  $\vec{e}_z$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ ;  $\hat{r}$  – электрооптический тензор третьего ранга;  $I_d$  – темновая интенсивность, включающая фоновую подсветку кристалла;  $I_\infty$  – значение интенсивности светового пучка при  $x \rightarrow \pm \infty$ ;  $\alpha$  – коэффициент поглощения.

Рассмотрим случай, когда вектор напряженности внешнего электрического поля  $\vec{E}_0$ , приложенного к фоторефрактивному кристаллу, параллелен кристаллографическому направлению  $[1\bar{1}\bar{1}]$  ( $\theta \approx 35.3^\circ$ , где  $\theta$  – ориентационный угол, отсчитываемый по часовой стрелке от направления  $[1\bar{1}0]$  к горизонтально расположенной оси  $x$  рабочей системы координат, вдоль которой приложено внешнее электрическое поле).

При моделировании взаимодействия тёмных пучков будем использовать кубический фоторефрактивный кристалл с параметрами, близкими к параметрам BSO:  $n_0 = 2.54$ ,  $\rho = 22$  град/мм,  $r_{41} = 5 \cdot 10^{-12}$  м/В;  $I_\infty/I_d = 1$  [4] и  $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>-1</sup> [5]. Длина световой волны  $\lambda = 0.6328$  мкм.

В численных расчетах будем полагать, что огибающие амплитуд темных пучков на входе в кристалл имеют tanh-подобный профиль [6]:

$$A(x) = A_0 \tanh((x \pm \Delta x/2)/x_0), \quad (2)$$

где полуширина темного пучка  $x_0 = 11$  мкм. Расстояние между центрами темных пучков  $\Delta x = 12$  мкм.

В отсутствие внешнего электрического поля взаимодействующие тёмные пучки при  $z > 4$  мм объединяются в один постепенно расширяющийся тёмный пучок (рисунок 1а, б). Изменяя параметры взаимодействия (расположение центров темных пучков и величину внешнего электрического поля), можно получить изгибание одного темного пучка под влиянием другого пучка в сторону последнего.

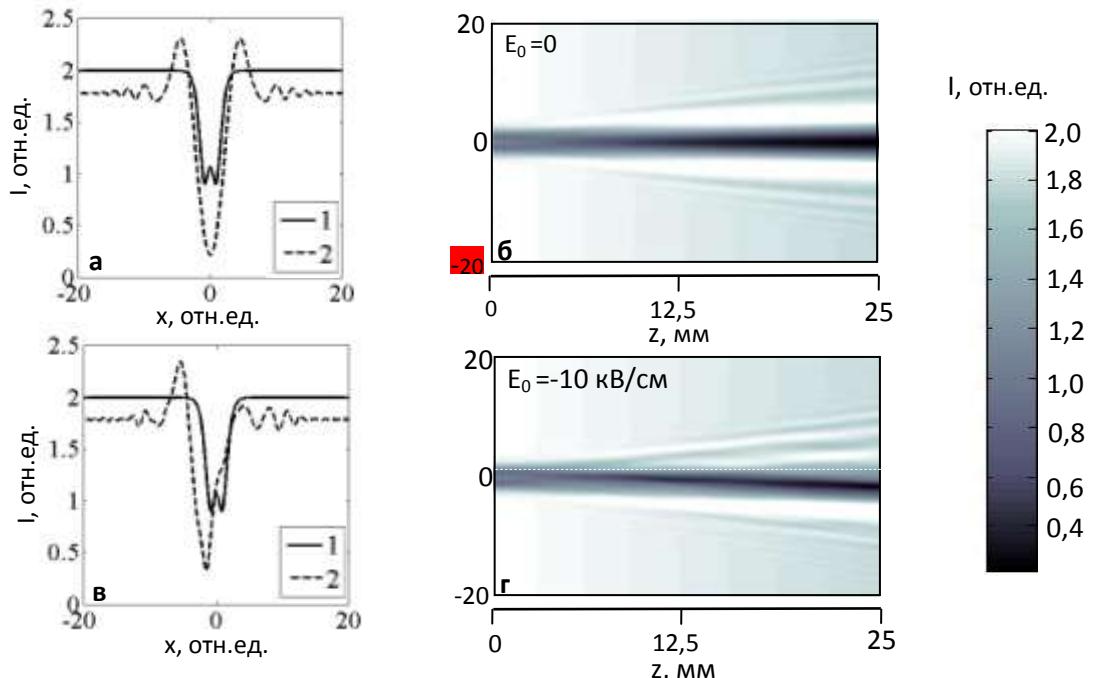
На рисунке 1в,г представлены результаты взаимодействия ортогонально поляризованных одномерных темных пучков одинаковой интенсивности (первый (верхний) пучок поляризован параллельно направлению внешнего электрического поля, второй (нижний) – перпендикулярно) при прохождении их через кубический поглощающий оптически активный фоторефрактивный кристалл толщиной 25 мм при значении внешнего электрического поля  $E_0 = -10$  кВ/см.

Горизонтальная пунктирная линия (рисунок 1г) проведена для сравнения положения пучков на входе и выходе из кристалла. В результате взаимодействия рассматриваемых пучков на выходе из фоторефрактивного кристалла наблюдается только один темный пучок.

Таким образом, при взаимодействии ортогонально поляризованных темных пучков пучок 2 индуцирует угловое отклонение пучка 1.

Если при распространении первого темного пучка, поляризованного параллельно вектору внешнего электрического поля  $\vec{E}_0$ , не учитывать второй, поляризованный перпендикулярно вектору  $\vec{E}_0$ , то пучок 1 распространяется в квазисолитонном режиме (рисунок 2а, б), а если при распространении второго темного пучка не учитывать первый, то второй пучок сильно дифрагирует, т. к. находится в невыгодных условиях для квазисолитонного распространения (рисунок 2 в, г).

Пучок 2 является направляющим, так как он задает направление распространения пучка 1. Отклоненный темный пучок 1 может вести за собой светлый пучок. В оптике это явление, названное «логические ворота углового отклонения» [7], позволяет осуществлять логические операции путем пространственного переключения светового пучка в направлении, ортогональном направлению его распространения.



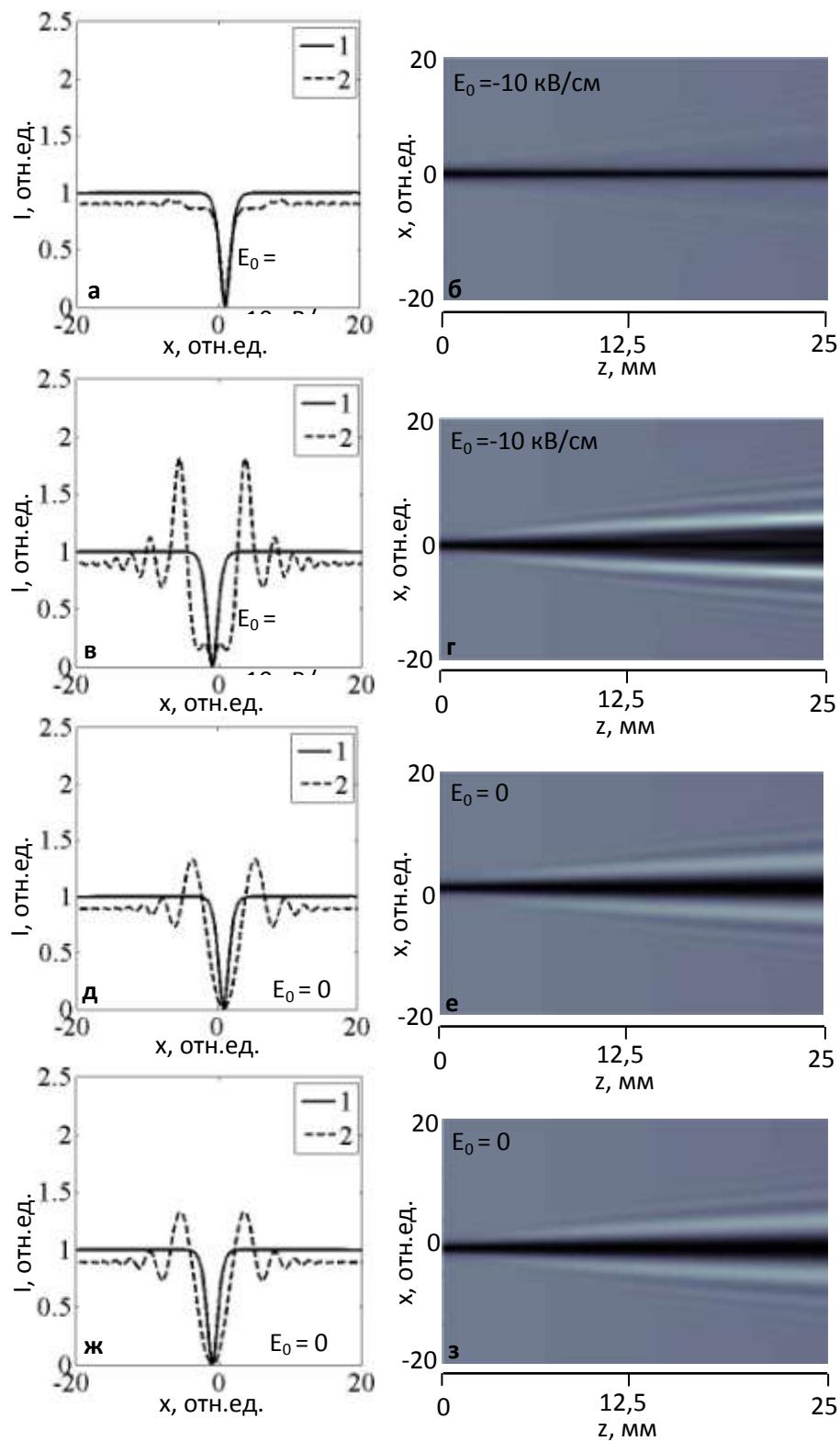
(а), (в) – распределение относительной интенсивности на входе в кристалл – кривая 1, и на выходе из кристалла – кривая 2; (б), (г) – распределение относительной интенсивности по толщине кристалла

**Рисунок 1 – Когерентное взаимодействие ортогонально поляризованных темных пучков в поглощающем кубическом фотопрефактивном кристалле толщиной 25 мм**

Без учета внешнего электрического поля ширина темных пучков 1 и 2 в результате дифракции увеличивается (рисунок 2д–з). Распространение темных пучков в этом случае описывается уравнением (1) без учета третьего нелинейного слагаемого.

При «включении» внешнего электрического поля  $\vec{E}_0$  третье слагаемое в уравнении (1), ответственное за нелинейность, содержит коэффициенты  $\mu_1$  и  $\mu_3$  [1], зависящие от ориентационного угла  $\theta$ .

Коэффициент  $\mu_1$  отвечает за фокусировку темного пучка, поляризованного параллельно вектору внешнего электрического поля  $\vec{E}_0$ . Так как при угле  $\theta = 35.3^\circ$   $\mu_1$  достигает максимального положительного значения,  $\mu_1 = 1.15$ , 1-ый пучок распространяется в квазисолитонном режиме (рисунок 2а–б). Коэффициент  $\mu_3$  отвечает за фокусировку темного пучка, поляризованного перпендикулярно вектору внешнего электрического поля  $\vec{E}_0$ . Так как при угле  $\theta = 35.3^\circ$   $\mu_3$  имеет отрицательное значение,  $\mu_3 = -0.58$ , 2-ой пучок находится в невыгодных условиях для достижения квазисолитонного распространения и его ширина увеличивается (рисунок 2в–г).



(а), (в), (д), (ж) – распределение относительной интенсивности на входе в кристалл – кривая 1, и на выходе из кристалла – кривая 2; (б), (г), (е), (з) – распределение относительной интенсивности по толщине кристалла

**Рисунок 1 – Распространение 1-го (а), (б), (д), (е) и 2-го (в), (г), (ж), (з) темных пучков в поглощающем кубическом фотопрекративном кристалле толщиной 25 мм**

Таким образом, описанная выше геометрия взаимодействия, как показывают численные расчеты, позволяет реализовать управление темным пучком 1 с помощью темного пучка 2. Путем проведения численного анализа взаимодействия темных пучков в кубическом поглощающем

оптически активном фоторефрактивном кристалле показано, что путем оптимизации параметров взаимодействия (полуширины темных световых пучков, расстояния между центрами пучков и напряженности внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу) можно достичь максимального отклонения одного темного пучка под действием другого.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант на выполнение научно-исследовательской работы «Темные пространственные солитоны в фоторефрактивных кристаллах», грант Государственной комплексной программы научных исследований «Электроника и фотоника», задание «Фотоника 2.2.09»), а также БРФФИ (проект № Ф12Р-222) и РФФИ (проект № 12-02-90038-Бел\_а).

### **Литература**

1. Влияние оптической активности на самофокусировку световых пучков в фоторефрактивных кристаллах / В.В. Шепелевич [и др.] // Квантовая электроника. – 2003. – Т. 33, № 5. – С. 446–450.
2. Singh, S.R. Effects of optical activity on photorefractive spatial solitons in a biased  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  crystal / S.R. Singh, D.N. Christodoulides // J. Opt. Soc. Am. B. – 1996. – Vol. 13, № 4. – P. 719–724.
3. Effect of natural optical activity on the propagation of photorefractive solitons / W. Krolikowski [et al.] // Opt. Commun. – 1996. – Vol. 132. – P. 179–189.
4. Cristodoulides, D.N. Bright, dark and gray spatial soliton states in photorefractive media / D.N. Cristodoulides, M.I. Carvalho // J. Opt. Soc. Am. B. – 1995. – Vol. 12, № 9. – P. 1628–1633.
5. Solitonlike propagation in photorefractive crystals with large optical activity and absorption / E. Fazio [et al.] // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 66. – P. 016605-1–016605-12.
6. Dynamics of incoherent bright and dark self-trapped beams and their coherence properties in photorefractive crystals / T.N. Coskun [et al.] // Opt. Lett. – 1998. – Vol. 23, № 6. – P. 418–420.
7. Blair, S. Spatial Soliton Angular Deflection Logic Gates / S. Blair, K. Wagner // Appl. Opt. – 1999. – Vol. 38. – P. 6749–6772.

## **A. Ф. Коршкова**

### **ПРИЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ НА ПАССИВНОЙ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ**

Инновационные процессы в обществе требуют оперативного внедрения передового педагогического опыта и передового инновационного опыта в массовую педагогическую практику. Роль инноваций в современном обществе, причины сопротивления инновациям, поиск методов его преодоления интенсивно изучается во всем мире, в том числе и в нашей стране, в рамках новой ветви педагогики – инновационной педагогики.

Главная причина сопротивления инновациям – психологическая инерция человека [2]. Психологическая инерция учителя, проявляется в желании работать по неизменным программам, в стремлении сохранить привычные методы работы, использовать в работе стабильные учебники, в нежелании учиться и т. д.

Кроме психологической инерции выявлены и другие причины инновационного сопротивления. Среди них недостаточная теоретическая подготовка многих учителей в области инноватики, неумение выявлять приемы инновационной деятельности в работе коллег, учителей-новаторов и внедрять ППО и ПИО в свою педагогическую деятельность.

Лучший способ пропаганды инновационных технологий и вооружения учителя методами внедрения инноваций являются открытые уроки опытных коллег, мастер-классы учителей-новаторов, конкурсы педагогического мастерства.

О том, как трудно выявить на уроках мастеров используемые инновационные приемы и описать их сущность в форме четко сформулированных мыслей пишут И. И. Цыркун и Л. А. Козинец в книге «Лидеры педагогической профессии: сценарии эффективной педагогической деятельности».

«На первый взгляд, в рамках Республиканского конкурса учитель математики проводил обычные уроки. Ученики изучали теоретический материал, решали задачи, писали математические диктанты. А в целом эти обычные уроки демонстрировали все грани педагогического творчества учителя. Высоко оценило жюри и его образовательный проект «В новый век – с развивающим интегрированным обучением» [1]. Здесь речь идет о

финалисте Республиканского конкурса профессионального мастерства 2001 года, учителе математики политехнической гимназии № 6 г. Минска Д. Н. Черепко.

Совершенствование подготовки учителя к инновационной деятельности во время учебы в ВУЗе осуществляется путем использования в учебном процессе преподавания дисциплин психолого-педагогического цикла новых специальных методов и методических приемов, появляющихся в результате научных исследований и обобщения педагогического и инновационного опыта педагогов-новаторов.

Улучшить качество формирования педагогического мышления студентов можно с помощью найденного нами опытным путем приема, который можно использовать во время учебной пассивной педагогической практики в условиях ВУЗа и школы. Мы называем его методом мини-урока. Его можно использовать при подготовке студентов к педагогической практике в школе, на практических занятиях по дисциплинам психолого-педагогического цикла, на педпрактике в школе, а также на занятиях спецкурсов, спецсеминаров, на факультативных занятиях.

Суть метода в том, что в ПЗ по педагогике, или другой дисциплине психолого-педагогического цикла, включается мини-урок, который уместно используется как фрагмент занятия, помогающий достичь целей занятия и создающий условия для пассивной учебной педагогической деятельности и формирования их педагогического мышления. Продолжительность мини-урока 4–6 минут.

Приведем пример. В практическое занятие по педагогике на тему «Формирование экологической культуры учащихся и здорового образа жизни» можно включить мини-урок на тему «Использование лесных ягод в пост чернобыльский период на Мозырщине».

Преподаватель задает трем студентам группы физмата, проходящим подготовку по специальности «учитель информатики и английского языка» тему, цели, содержание занятия и продолжительность мини-урока и руководит творческой самостоятельной работой при написании сценария мини-урока. Главная цель преподавателя – использовать мини-урок для формирования педагогического мышления студентов.

Главные образовательные цели, которые преследуют студенты, исполняющие роль учителей, – использовать материал урока для вооружения группы некоторыми правилами безопасного поведения на территориях, подвергшихся радиационному загрязнению, сообщение элементарных знаний в области дозиметрии, введение и первичное закрепление новых лексических единиц по теме в объеме, необходимом для работы на уроке.

Воспитательная цель – воспитывать любовь и бережное отношение к природе своего края.

Кроме того, ставится задача осуществить межпредметные связи с курсами радиационной безопасности, физики, биологии и охраны окружающей среды.

Авторы урока могут использовать разнообразный педагогический инструментарий для воплощения содержания урока и достижения его целей. Приветствуется применение наглядности (фотографии, презентации), использование ТСО, компьютерных технологий и т. д.

Приведём пример фрагмента мини-урока. В ходе его реализации один из студентов с помощью графопроектора проецирует на доску список новых лексических единиц по теме. После этого он создает на большом экране изображения фотографий, комментируя их рассказом на иностранном языке: «Черника – вкусная и полезная ягода. Она всегда была и является сейчас важным продуктом питания белорусов. Но сегодня красота ягод и опыт, накопленный нашим народом по их использованию, не являются надежными критериями их потребительских качеств. Черника накапливает радионуклиды, главным образом цезий-137, опасные для здоровья. Собранные в лесу ягоды необходимо обязательно проверять на содержание РВ в экологической лаборатории или в санстанции. Проверку можно произвести и в экологической лаборатории нашего университета. Санстанция выдает справку, в которой указывается фактический уровень РВ ягод.

РВ – это первые буквы слов радиоактивное вещество. Число, указанное в графе РВ обозначает удельную активность радиоактивных изотопов цезия-137 в продукте. Удельная активность – это число распадов радиоактивных ядер в одном килограмме вещества за одну секунду. Предельный допустимый уровень радиоактивного загрязнения всех лесных ягод равен 185  $Bq/kg$ . Запомните это число. Обратите внимание: в справке указывается фактический уровень РВ, но не указывается предельный допустимый уровень радиоактивного загрязнения продукта, хотя знать его важно. Чем меньше фактический уровень загрязнения продукта по сравнению с предельно допустимым, тем его качество лучше». Студент-учитель рекомендует своим «ученикам»

научить своих близких при покупке черники обязательно требовать справку из санстанции и сравнивать фактический уровень РВ с предельно допустим. Авторы мини-урока демонстрируют на экране справки, демонстрирующие превышение предельно допустимого уровня содержания РВ в собранной на территории РБ чернике в десятки и даже в сотни раз

После этого на фоне черничника фактически лишенного листьев и ягод демонстрируется фотография девушки, держащей в руке скребок. Комментируя сбор черники скребком, учитель обращает внимание на то, что этот метод сбора ягод запрещен, т.к. травмирует черничник. Куст черники растет медленно и начинает плодоносить только в семилетнем возрасте.

После окончания мини-урока учителя дают задание студентам в письменной форме ответить на вопросы анонимной анкеты:

- 1)Какие принципы, законы и закономерности педагогики использованы на уроке?
- 2) Какие методы изложения нового материала использованы на уроке?
- 3) Назовите методы активизации познавательной деятельности, использованные на уроке.
- 4) Межпредметные связи с какими учебными предметами реализованы на уроке?
- 5) Способствует ли урок формированию обобщенных знаний учащихся?
- 6) Какие признаки качества объяснения нового материала вы можете выделить?
- 7) Использование каких методов и приемов вы считаете неуместными на данном уроке?
- 8) Использование каких методов и приемов, по вашему мнению, облегчило бы достижение целей?
- 9)Является ли система методов и методических приемов, по вашему мнению, инновационной и почему?

10) Какой педагогический инструментарий использовал преподаватель при подготовке студентов к уроку? Можно ли, по вашему мнению, его деятельность считать инновационной?

Анализ заполненных анкет позволяет преподавателю получить важную информацию о состоянии знаний студентов и об умениях применять их для методического анализа урока. Полученная информация в дальнейшем может быть использована для коррекции педагогической деятельности.

Учебная деятельность студентов на практическом занятии содержит элементы учебной пассивной педагогической практики, которая является средством формирования педагогического мышления студентов и является диагностической по своей форме, т.к. студенты ищут ответ на вопрос: как педагогический инструментарий, использованный на уроке, способствует достижению целей.

Диагностический тип методической деятельности принципиально отличается от прогностического, который осуществляется при разработке занятия. При разработке занятия студент или учитель использует известные ему теоретические знания и эрудицию для такого использования, при котором, с его точки зрения, будет достигнут максимальный учебный и воспитательный результат.

В процессе учебной пассивной педагогической практики в диагностическом варианте студенты оперативно, используя теоретические знания с большей или меньшей степенью успеха, проникают в творческий замысел учителя. Они актуализируют огромные массивы знаний, приобретают навыки оперирования научной терминологией, учатся учиться у опытных учителей и учителей-новаторов.

Умения, приобретенные во время пассивной педпрактики в вузе необходимы студентам время пассивной и активной учебной педпрактики в школе, при посещении уроков учителей и практикантов. Они необходимы в предстоящей работе в качестве учителя и превалируют в работе методистов, инспекторов, экспертов и т.д.

Умение анализировать урок является важнейшим положительным признаком развитого педагогического мышления и поэтому учебную пассивную педагогическую практику нельзя недооценивать как эффективное средство формирования педагогического мышления студентов.

### **Литература**

1. Цыркун, И. И. Лидеры педагогической профессии: сценарии эффективной педагогической деятельности / И. И. Цыркун, Л. А. Козинец. – Минск, 2010.
2. Полупанова, Е. Г., Инновации в западном образовании: основные направления научных исследований / Е. Г. Полупанова. – Минск, 2005.

Г. В. Кулақ, Г. В. Крох, Т. В. Николаенко

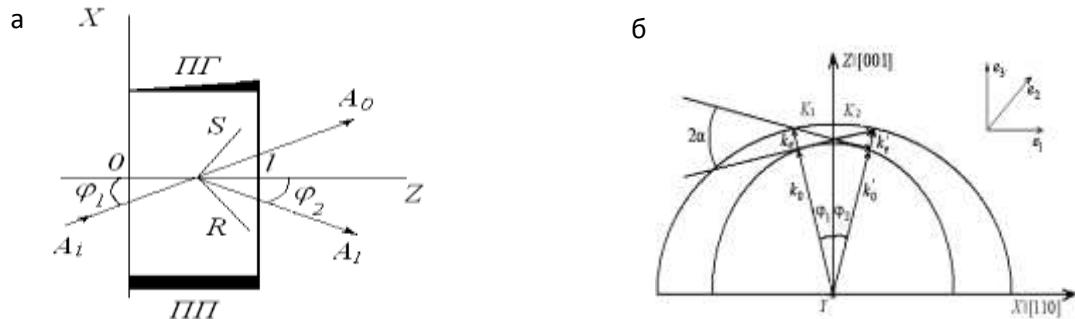
## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕССЕЛЬ-СУПЕРГАУССОВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ПРИ АКУСТООПТИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Для целей оптимизации акустооптических (АО) устройств (модуляторов, дефлекторов, процессоров) необходимо знать влияние поляризации и амплитудного распределения световых пучков на характеристики дифрагированного света [1]. К настоящему времени хорошо изучена дифракция гауссовых световых пучков на ультразвуке [1-4]. При этом в работах [1, 2] применен спектральный метод для расчета дифрагированных световых пучков, а в [3, 4] метод Римана для расчета дифракции ограниченных световых пучков. В работе [3] исследовано влияние затухания ультразвука на поляризационные и энергетические характеристики световых пучков, в [4] влияние оптической гиротропии. В работе [5] с использованием двухмерной теории связанных волн предложено теоретическое обоснование особенностей пространственно – углового преобразования ограниченных гауссовых световых пучков на частотно – модулированных акустических сигналах. Показано [6], что в кристаллах пирателлурита возможна поляризационно-независимая модуляция бесселевых световых пучков, то есть эффективность брэгговской дифракции не зависит от состояния поляризации падающего пучка. На практике формируют приближенно бесселевые пучки, ограничивая их диаметр [7]. Квазибездифракционные световые пучки находят широкое применение в области нелинейной кристаллоптики (см. [8]). К настоящему времени с использованием БСП реализовано большинство известных нелинейно-оптических взаимодействий, ранее изученных для пучков гауссова типа (самовоздействие, генерация гармоник, параметрическое преобразование частоты и др.).

В настоящей работе с использованием двухмерной теории связанных волн рассмотрена брэгговская АО дифракция бессел-супергауссовых световых пучков (БСГП), распространяющихся вблизи оптической оси одноосного гиротропного кристалла, на бегущей ультразвуковой (УЗ) волне. Предложено теоретическое обоснование преобразования формы БСГП, дифрагированных на ультразвуке.

Предположим, что область, занятая ультразвуком, занимает пространство между плоскостями  $z=0$  и  $z=l$ . Световой пучок с некоторым распределением амплитуды распространяется в плоскости  $XZ$  под углом  $\varphi_1$  к фронту УЗ волны и дифрагирует под углом  $\varphi_2$ .

Геометрия АО взаимодействия и схема расположения волновых векторов света ( $k_{o,e}$ ,  $k'_{o,e}$ ) и ультразвука ( $K_{1,2}$ ) представлена на рисунке 1.



**Рисунок 1 – Геометрия анизотропной акустооптической дифракции ограниченных световых пучков (ПП – пьезопреобразователь, ПГ – поглотитель) (а); схема расположения преломленной и дифрагированной плосковолновых компонент БСГП в плоскости дифракции кристалла  $\text{TeO}_2$  ( $K_{1,2}$  – волновые векторы ультразвука,  $k_{o,e}$ ,  $k'_{o,e}$  – волновые векторы преломленной и дифрагированной волн,  $2\alpha$  – угол между акустическими векторами  $K_1$  и  $K_2$ ) (б).**

Плоская УЗ волна имеет вектор смещения вида [1]:

$$U = U_0 \exp[i(Kx - \Omega t)], \quad (1)$$

где  $\Omega = 2\pi f$  – центральная частота УЗ источника,  $U_0$  – амплитуда УЗ волны;  $K = \Omega/v$ , ( $v$  – фазовая скорость УЗ волны). УЗ волна создает периодическое в пространстве и времени

изменение тензора диэлектрической проницаемости  $\Delta\epsilon_{ij}$ , связанное с тензором упругих деформаций  $U_{ik} = (\nabla_k U_i + \nabla_i U_k)/2$  и тензором фотоупругих постоянных  $p_{ijkl}$ .

Из уравнений Максвелла и материальных уравнений следует волновое уравнение для напряженности светового поля в области, занятой ультразвуком [1, 3]. Решение волнового уравнения ищем в виде суммы двух связанных волн с медленно изменяющимися амплитудами:

$$E = e_{\tau 0} A_0(x, z) e^{i[k_0 r - \alpha t]} + e_{\tau 1} A_1(x, z) e^{i[k_1 r - \alpha_1 t]}, \quad (2)$$

где  $e_{\tau 0,1}$  – единичные векторы эллиптической поляризации дифрагированных волн;  $\Omega_1 = \omega \pm \Omega$ , где  $\omega$  – частота световой волны;  $k_{0x} = (\omega/c)n_0 \sin \varphi_1$ ,  $k_{0z} = (\omega/c)n_0 \cos \varphi_1$ ,  $k_{1x} = [(\omega \pm \Omega)/c]n_1 \sin \varphi_2$ ,  $k_{1z} = [(\omega \pm \Omega)/c]n_1 \cos \varphi_2$  – волновые векторы падающей и дифрагированной волны;  $c$  – скорость света в вакууме;  $n_0 = \sqrt{\epsilon_{ij} \tilde{k}_{0i} \tilde{k}_{0j}}$ ,  $n_1 = \sqrt{\epsilon_{ij} \tilde{k}_{1i} \tilde{k}_{1j}}$ , где  $\tilde{k}_0$  ( $\tilde{k}_1$ ) – единичные векторы в направлении распространения дифрагированной волны нулевого (первого) порядка. Подставив выражение (2) в волновое уравнение для напряженности светового поля  $E$  получим систему уравнений связанных волн:

$$\frac{\partial A_0}{\partial s} + i\gamma_0 A_1 = 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial r} + i\gamma_1 A_0 = 0, \quad (3)$$

где коэффициенты связи мод выражаются через свертки тензора диэлектрической проницаемости  $\Delta\epsilon_{ij}$  с векторами поляризации  $\gamma_{0,1} = k(e_{\tau 0,1}^* \Delta\hat{\epsilon}^* e_{\tau 1,0}) / 4\sqrt{n_o n_e \cos(\alpha - \varphi_1) \cos(\alpha + \varphi_2)}$ , причем  $k = 2\pi/\lambda_0$  (знак «\*» означает комплексное сопряжение,  $\lambda_0$  – длина световой волны вакууме);  $s = z \sin \varphi_2 - x \cos \varphi_2$ ,  $r = z \sin \varphi_1 + x \cos \varphi_1$ ;  $n_o$  ( $n_e$ ) – обычновенный (необыкновенный) показатели преломления кристалла. При таком подходе из-за малой длины АО взаимодействия не учитывается изменение фазового волнового фронта светового пучка.

Предполагается, что падающий световой пучок имеет бессель-супергауссовое амплитудное распределение [7]:  $A(r') = A_{0n} \exp[-(r'^{2n}/2w^{2n})J_0(k\gamma r')]$ , где  $J_0(x)$  – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка,  $\gamma$  – параметр конусности светового пучка,  $w$  – полуширина супергауссовой составляющей пучка,  $n$  – параметр супергауссности. Постоянная амплитуда

$$A_{0n} \text{ находится из условия нормировки: } A_{0n} = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-r^{2n}/w^{2n}) J_0^2(k\gamma r) dr \right]^{-1/2}.$$

Если искать решение системы уравнений (3) методом Римана [3–5] с использованием граничных условий:  $A_0(z=0) = A$ ,  $A_1(z=0) = 0$ , то общее решение для дифрагированных волн нулевого  $A_0(r)$  и первого  $A_1(s)$  порядка можно представить в виде:

$$A_0(r) = A(r) - 0,5v \int_{-1}^{+1} A[r - l(1 - \xi) \sin \varphi_1] \frac{J_1[v\sqrt{1 - \xi^2}]}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi, \quad (4)$$

$$A_1(s) = i0,5 \int_{-1}^{+1} A[l(1 - \xi) \sin \varphi_2 - s] J_0[v\sqrt{1 - \xi^2}] d\xi, \quad (5)$$

где  $v$  – коэффициент АО модуляции на монохроматической УЗ волне частотой  $\Omega$ ,  $l$  – длина АО взаимодействия,  $J_1(x)$  – функции Бесселя первого рода, первого порядка.

Величина  $v$  определяется сверткой тензора приращений диэлектрической проницаемости  $\Delta\epsilon_{ij}$  с единичными векторами эллиптической поляризации  $e_{\tau 0,1} = (e_{p,2} + i\tau_{o,e} e_{2,p}) / \sqrt{1 + \tau_{o,e}^2}$  ( $e_p$  – единичный вектор, перпендикулярный направлению распространения дифрагированной волны и лежащий в плоскости дифракции;  $e_2$  – единичный вектор, перпендикулярный плоскости дифракции;  $\tau_{o,e}$  – эллиптическости дифрагированных волн), то есть  $v \sim (e_{\tau 0}^* \Delta\hat{\epsilon} e_{\tau 1})$  [6].

Расчеты проводились для анизотропной АО дифракции световых волн, распространяющихся вблизи оптической оси кристалла парателлурида ( $TeO_2$ ), обладающего

гиротропией, на медленной сдвиговой УЗ волне, распространяющейся вдоль оси [110] и поляризованной вдоль оси [110]. В результате выполнения сверток тензора  $\Delta\hat{\epsilon}$  с вектором поляризации получаем коэффициент АО модуляции световой волны

$$V_{oe} = \Delta[\tau_o \tau_e \cos(\alpha - \varphi_2) - \cos(\alpha - \varphi_1)]\Delta_1 + [\sin(\alpha + \varphi_1) - \tau_o \tau_e \sin(\alpha - \varphi_2)]\Delta_2, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{oe} &= [(1 + \tau_o^2)(1 + \tau_e^2)]^{1/2}, \\ \Delta_1 &= [n_e^4(p_{11} - p_{12}) + n_o^2 n_e^2 p_{44} \sin(2\alpha)/8]/\tau_{oe}, \Delta_2 = [n_e^4 \sin(2\alpha)(p_{12} - p_{11}) + n_o^2 n_e^2 p_{44}/2]/\tau_{oe}, \\ \Delta &= \pi U_{12} l / [2\lambda_0 [n_o n_e \cos(\alpha - \varphi_1) \cos(\alpha + \varphi_2)]^{1/2}], \end{aligned}$$

причем  $U_{12} = [2I_a / \rho v^3]^{1/2}$  ( $I_a$  – интенсивность УЗ волны,  $v$  – фазовая скорость УЗ волны,  $\rho$  – плотность кристалла;  $p_{11}$ ,  $p_{12}$ ,  $p_{44}$  – фотоупругие постоянные). В случае  $e$ - $o$  преобразования световых пучков в формулах (4)–(6) следует выполнить замену:  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ,  $o \leftrightarrow e$ .

Разлагая, выражения (4), (5) в степенной ряд (до первой степени) по малым геометрическим параметрам:  $g_1 = l \sin(\varphi_{1,2})/w$  [9],  $g_2 = k\gamma l \sin\varphi_{1,2}$  ( $\varphi_1 \approx \varphi_2$ ), получим:

$$\begin{aligned} A_0(r') &= A(r') \cos(\nu) - 0,5 A_{0n} \mathcal{U}_1 [ng_1 r'^{2n-1} \exp(-0,5r'^{2n}) J_0(r') + g_2 J_1(r') \exp(-0,5r'^{2n})] + \\ &0,5 A_{0n} \mathcal{U}_3 [ng_1 r'^{2n-1} \exp(-0,5r'^{2n}) J_0(r') - 0,5 A_{0n} \nu g_2 J_1(r') \exp(-0,5r'^{2n})], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} A_1(s') &= A(s') \sin(\nu) + 0,5 A_{0n} \mathcal{U}_2 [ng_1 s'^{2n-1} \exp(-0,5s'^{2n}) J_0(s') + g_2 J_1(s') \exp(-0,5s'^{2n})] - \\ &0,5 A_{0n} \mathcal{U}_4 [ng_1 s'^{2n-1} \exp(-0,5s'^{2n}) J_0(s') + 0,5 A_{0n} \nu g_2 J_1(s') \exp(-0,5s'^{2n})], \end{aligned} \quad (8)$$

где  $r' = r/w$ ,  $s' = s/w$ ,  $r'' = k\gamma r$ ,  $s'' = k\gamma s$ ,  $I_1 = (4/\nu) \sin^2(\nu/2)$ ,  $I_2 = \sin(\nu)/\nu$ ,  $I_3 = 2[J_0(\nu) - 1]/\nu$ ,  $I_4 = -2J_1(\nu)/\nu$ .

С учетом выражений (7), (8) интенсивности супергауссовых дифрагированных световых пучков равны ( $g_2 = 0$ ,  $\gamma = 0$ ):

$$I_{n0} = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_0(r)|^2 dr = \cos^2 \nu - n \nu g_1 A_{0n} \cos \nu \int_{-\infty}^{+\infty} r'^{2n-1} \exp(-r'^{2n}/2) dr, \quad (9)$$

$$I_{n1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_1(s)|^2 ds = \sin^2 \nu + n \nu g_1 A_{0n} \sin \nu \int_{-\infty}^{+\infty} s'^{2n-1} \exp(-s'^{2n}/2) ds. \quad (10)$$

Для гауссовых световых пучков ( $n=1$ ):  $I_{n0} = \cos^2 \nu$ ,  $I_{n1} = \sin^2 \nu$ .

Интенсивности бесселевых дифрагированных световых пучков радиусом  $R_h$  даются соотношениями ( $g_1 = 0$ ,  $w \rightarrow \infty$ ):

$$I_{n0} = \int_0^{R_h} |A_0(r)|^2 dr = \cos^2 \nu - g_2 A_{0n} [1 - J_0^2(R_h)] [1 - J_0(\nu) + \sin^2(\nu/2)], \quad (11)$$

$$I_{n1} = \int_0^{R_h} |A_1(s)|^2 ds = \sin^2 \nu - g_2 A_{0n} [1 - J_0^2(R_h)] [J_1(\nu) + 0,5 \sin \nu]. \quad (12)$$

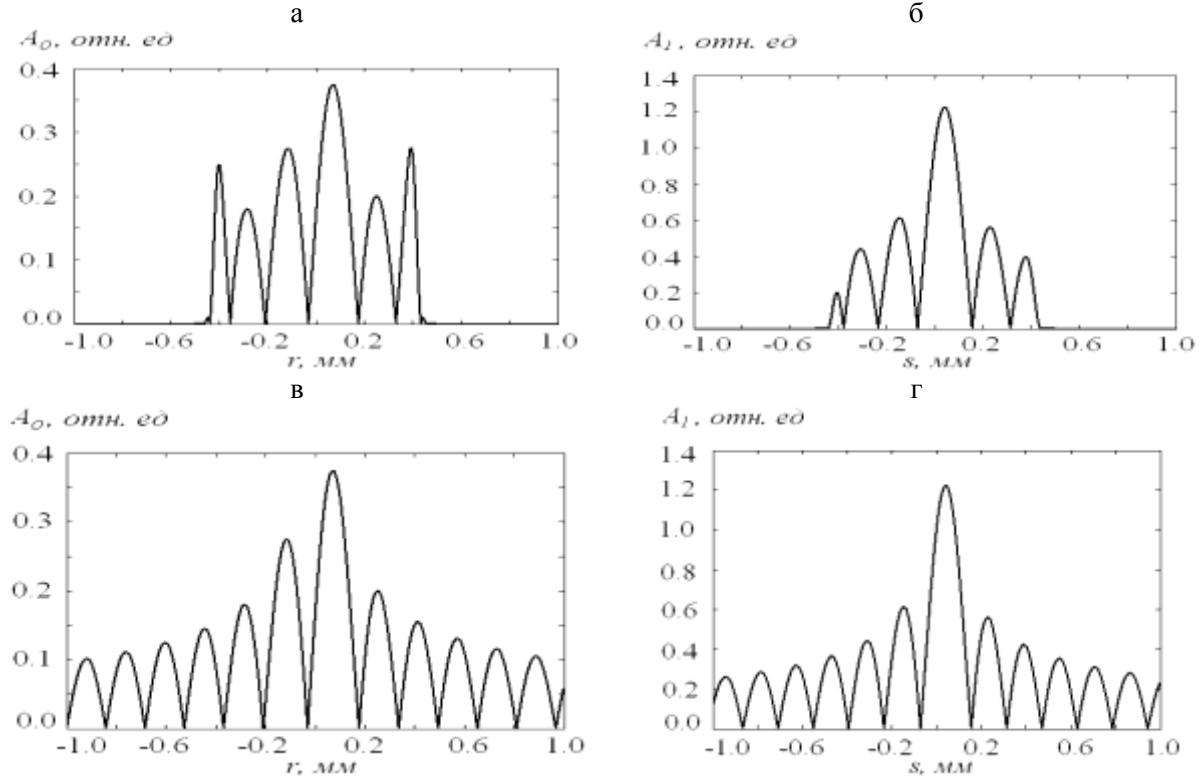
Эффективности  $o$ - $e$  ( $e$ - $o$ ) преобразования собственных эллиптически поляризованных БСГП, находим из соотношений:

$$\eta_{oe(eo)} = \frac{I_{n1}(\nu_{oe(eo)})}{I_{n0}(\nu_{oe(eo)}) + I_{n1}(\nu_{oe(eo)})}. \quad (13)$$

Из выражений (7), (8) следует, что при АО дифракции имеет место изменение формы БСГП при увеличении параметра конусности бесселевой составляющей пучка, ширины супергауссовой составляющей пучка, интенсивности ультразвука, а также геометрических параметров пучков  $g_1$  и  $g_2$ . Как следует из выражений (9)–(13) при учете геометрических параметров дифрагированных бесселевых и супергауссовых пучков имеет место изменение модуляционных зависимостей дифрагированных пучков по сравнению с плосковолновым приближением [1]. Для гауссовых световых пучков при учете лишь первого приближения по малому параметру  $g_1$  форма модуляционной зависимости совпадает с имеющей место в плосковолновом приближении.

Численные расчеты на основании выражений (7), (8), (13) проводились для АО дифракции БСГП с длиной волны  $\lambda_0 = 0,63$  мкм, распространяющихся вблизи оптической оси кристалла  $TeO_2$ , на медленной сдвиговой УЗ волне с фазовой скоростью  $v = 617$  м/с.

На рис. 2 представлена зависимость амплитуды дифрагированного светового пучка нулевого ( $A_0$ ) и первого ( $A_1$ ) порядка от поперечной координаты  $r$  и  $s$  соответственно.



**Рисунок 2 – Поперечное распределение амплитуды дифрагированного светового пучка нулевого  $A_0$  и первого  $A_1$  порядка для падающего БСГП с  $w=0,2$  мм (а, б) и  $w=2$  мм (в, г)**  
 $(n=10, l=5$  мм,  $n_o = 2,21; n_e = 2,35; \gamma=2$  мрад,  $\alpha = 8^0, f = 30$  МГц,  $p_{11} = 0,0074; p_{12}=0,187;$   
 $p_{44}=-0,17; \rho = 5,72$  кг/см<sup>3</sup>,  $I_a = 1$  Вт/см<sup>2</sup>)

Из рисунка 2 а, б следует, что для падающего БСГП, имеющего малую ширину  $w$  дифрагированный пучок нулевого порядка существенно искажается. При этом не симметричная форма пучка обусловлена дифракционным процессом, когда боковые максимумы падающего БСГП достигают значительных интенсивностей. В этом случае при достаточно высокой интенсивности ультразвука достигается преобразование энергии света в дифракционный первый порядок (и наоборот); дифрагированный пучок первого порядка испытывает преобразование, при котором боковые максимумы падающего пучка увеличиваются по сравнению с центральным максимумом. С увеличением ширины гауссовой составляющей ( $w$ ) БСГП, дифрагированные пучки испытывают менее существенные преобразования формы. Следует отметить, что дифрагированные пучки первого порядка претерпевают менее значительные амплитудные преобразования, чем нулевого. Расчеты показывают, что для супергауссовых падающих световых пучков ( $\gamma \rightarrow 0$ ) дифрагированные световые пучки нулевого и первого порядка имеют супергауссов профиль. Преобразование формы БСГП на границе области АО взаимодействия может также трактоваться как эффект Гуса-Хэнхена продольного смещения световых пучков вдоль выходной грани области АО взаимодействия [3, 9].

Зависимость эффективности дифракции  $\eta$  от интенсивности ультразвука для нулевого и первого дифракционного порядка представлена на рисунке 3.

Из рисунка следует, что при изменении ширины гауссовой составляющей БСГП эффективность дифракции в нулевом и первом дифракционном порядке практически не изменяется и достигает максимального значения. Данная особенность дифракции объясняется тем, что каждая плосковолновая компонента, принадлежащая квазиконическому спектру падающего БСГП, рассеивается в соответствующую компоненту дифрагированного БСГП с эффективностью, близкой к ста процентам.

Таким образом, в работе развита двухмерная теория дифракции БСГП на ультразвуке. Полученные результаты показывают, что в гиротропных кристаллах парателлурита при дифракции БСГП имеет место преобразование их формы. Варьирование параметров, характеризующих АО взаимодействие позволяет добиваться условий оптимальной формы дифрагированных пучков при различных применениях. Такие АО устройства перспективны для применений в лазерных технологиях (в частности для лазерной резки и сварки), для зондирования поглощающих и рассеивающих сред на большую глубину, лазерной локации, микроскопии высокого разрешения и других областях, а также для решения проблем лазерной диагностики и контроля в промышленности, микро- и нанотехнологиях [6–8].

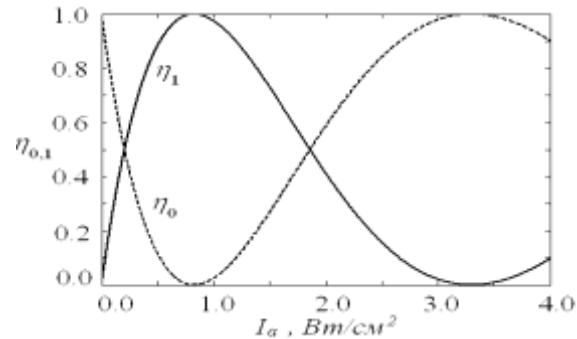
#### Литература

1. Балакший, В.Н. Физические основы акустооптики / В.Н. Балакший, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков. – М.: Радио и связь, 1985. – 279 с.
2. Балакший, В.Н. Акустооптическое взаимодействие ограниченных волновых пучков / В.Н. Балакший, Ч.А. Упасен // Вестник МГУ. Сер. физ.-мат. наук. 1982. Т. 23. Вып. 5. С. 71 – 76.
3. Белый, В.Н. Дифракция световых пучков на затухающих ультразвуковых волнах в оптически изотропных средах / В.Н. Белый, И.Г. Войтенко, Г.В. Кулак // ЖПС. 1992. Т 56. Вып. 5–6. С. 831 – 836.
4. Шарангович С.Н. Дифракция световых пучков на ультразвуке в гиротропных кубических кристаллах / С.Н. Шарангович // Автометрия. 1994. № 1. С. 31 – 39.
5. Анисимова, А.Е., Кулак, Г.В., Ропот, П.И. Преобразование световых пучков при брэгговской дифракции на частотно-модулированной ультразвуковой волне / А.Е. Анисимова, Г.В. Кулак, П.И. Ропот // Известия НАН Беларуси. Сер. Физ.-мат. наук 2012. №2. С. 93-96.
6. Поляризационно-независимая акустооптическая модуляция бесселевых световых пучков / В.Н. Белый [и др.] // Журн. прикл. спектр. 2014. Т. 81. № 1. С. 75 – 80.
7. Zhi-Ping Jiang Supper-Gaussian-Bessel beam / Zhi-Ping Jiang // Opt. Commun. 1996. V.125. P. 207-210.
8. Генерация второй гармоники бесселевыми световыми пучками в кристаллах КТП / В.Н. Белый [и др.] // Кvant. электрон. 1998. Т. 25. №11. С. 1037-1042.
9. Moharam, M.G., Goylord, T.K., Magnusson, R. Bragg diffraction of finite beams by thick grating / M.G. Moharam, T.K. Goylord, R. Magnusson // J. Opt. Soc. Am. 1980. V. 70. № 3. P. 300-304.

**А. В. Макаревич, В. В. Шепелевич**

#### МАКСИМАЛЬНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА ОБРАТНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ В ФОТОРЕФРАКТИВНОМ ПЬЕЗОКРИСТАЛЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СРЕЗА

Известно (см., например, [1]), что в процессе записи голограммы в фоторефрактивном пьезокристалле вследствие перераспределения электронов донорной примеси возникает пространственная модуляция электрического заряда, которая порождает сдвинутую на четверть периода относительно интерференционной картины решетку внутреннего электрического поля пространственного заряда (spatial charge), вектор напряженности  $\vec{E}_{sc}$  которого параллелен вектору



**Рисунок 3 – Зависимость эффективности дифракции  $\eta_{0,1}$  падающего бессель-супергауссового светового пучка с  $w=0,2\div2$  мм от интенсивности ультразвука  $I_a$  для нулевого ( $\eta_0$ ) и первого ( $\eta_1$ ) порядка дифракции ( $n=10$ ,  $l=5$  мм,  $n_o = 2,21$ ;  $n_e = 2,35$ ;  $\gamma=2$  мрад,  $\alpha = 8^{\circ}$ ,  $f = 30$  МГц,  $p_{11} = 0,0074$ ;  $p_{12} = 0,187$ ;  $p_{44} = -0,17$ ;  $\rho = 5,72$  кг/см<sup>3</sup>)**

голографической решетки  $\vec{K}$ . В свою очередь решетка электрического поля изменяет тензор обратной диэлектрической проницаемости фоторефрактивного пьезокристалла согласно выражению

$$\Delta B_{mn} = \Delta B_{mn}^{\infty} + \Delta B_{mn}^{\phi} = b_{mn} E_{sc},$$

где  $\Delta B_{mn}^{\infty}$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ) определяет вклад электрооптического эффекта,  $\Delta B_{mn}^{\phi}$  – одновременный вклад photoупругого и пьезоэлектрического эффектов [1],  $E_{sc} = |\vec{E}_{sc}|$ . При этом выражения для определения компонент  $b_{mn}$  имеют вид

$$\begin{aligned} b_{11} &= p_1 n_1 R_1 + p_2 n_2 R_2 + p_3 n_3 R_3, \quad b_{22} = p_1 n_1 R_2 + p_2 n_2 R_3 + p_3 n_1 R_1, \\ b_{33} &= p_1 n_3 R_3 + p_2 n_1 R_1 + p_3 n_2 R_2, \quad b_{12} = p_4 (n_1 R_2 + n_2 R_1) + r n_3, \\ b_{13} &= p_4 (n_1 R_3 + n_3 R_1) + r n_2, \quad b_{23} = p_4 (n_2 R_3 + n_3 R_2) + r n_1, \\ b_{21} &= b_{12}, \quad b_{31} = b_{13}, \quad b_{32} = b_{23}, \end{aligned}$$

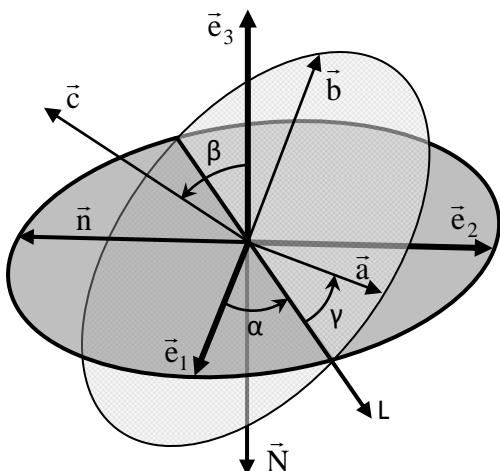
где

$$\begin{aligned} R_1 &= \gamma_{11} Q_1 + \gamma_{12} Q_2 + \gamma_{13} Q_3, \quad R_2 = \gamma_{21} Q_1 + \gamma_{22} Q_2 + \gamma_{23} Q_3, \quad R_3 = \gamma_{31} Q_1 + \gamma_{32} Q_2 + \gamma_{33} Q_3, \\ \gamma_{11} &= (\Gamma_{22} \Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2)/D, \quad \gamma_{22} = (\Gamma_{11} \Gamma_{33} - \Gamma_{13}^2)/D, \quad \gamma_{33} = (\Gamma_{11} \Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2)/D, \\ \gamma_{12} &= \gamma_{21} = (\Gamma_{13} \Gamma_{23} - \Gamma_{12} \Gamma_{33})/D, \quad \gamma_{13} = \gamma_{31} = (\Gamma_{12} \Gamma_{23} - \Gamma_{13} \Gamma_{22})/D, \\ \gamma_{23} &= \gamma_{32} = (\Gamma_{12} \Gamma_{13} - \Gamma_{11} \Gamma_{23})/D, \quad D = \Gamma_{11} (\Gamma_{22} \Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2) - \Gamma_{22} \Gamma_{13}^2 - \Gamma_{33} \Gamma_{12}^2 + 2 \Gamma_{12} \Gamma_{13} \Gamma_{23}, \\ \Gamma_{11} &= c_1 n_1^2 + c_3 (n_2^2 + n_3^2), \quad \Gamma_{22} = c_1 n_2^2 + c_3 (n_1^2 + n_3^2), \quad \Gamma_{33} = c_1 n_3^2 + c_3 (n_1^2 + n_2^2), \\ \Gamma_{12} &= \Gamma_{21} = n_1 n_2 (c_2 + c_3), \quad \Gamma_{13} = \Gamma_{31} = n_1 n_3 (c_2 + c_3), \quad \Gamma_{23} = \Gamma_{32} = n_2 n_3 (c_2 + c_3), \\ Q_1 &= 2 e_0 n_2 n_3, \quad Q_2 = 2 e_0 n_1 n_3, \quad Q_3 = 2 e_0 n_1 n_2. \end{aligned}$$

Данные выражения впервые представлены в [2] и справедливы для произвольной ориентации вектора голографической решетки относительно кристаллографической системы координат, определяемой единичными векторами  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ . Здесь  $e_0$  – пьезоэлектрический коэффициент,  $r$  – электрооптический коэффициент механически зажатого кристалла,  $c_1, c_2, c_3$  – коэффициенты упругости,  $p_1, p_2, p_3, p_4$  – photoупругие постоянные,  $n_1, n_2, n_3$  – координаты единичного вектора  $\vec{n}$ , определяющего направление вектора голографической решетки  $\vec{K}$  относительно кристаллографической системы координат и непосредственно связанного с осями рабочей системы координат, направление которых задается ортами  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

В силу широкого использования приведенных выражений для описания процессов формирования голографических решеток в кристаллах данного типа представляет интерес рассмотрение характера максимального изменения каждой из компонент тензора обратной диэлектрической проницаемости  $\Delta B_{mn}^{\max}$  в случае произвольного среза образца фоторефрактивного пьезокристалла.

Для решения этой задачи свяжем рабочую и кристаллографическую системы координат при помощи трех углов Эйлера (рисунок 1), согласно их определению, принятому в [3]. Здесь угол прецессии  $\alpha$  задает положение единичного вектора  $\vec{e}_1$  относительно линии узлов  $L$  и характеризует поворот кристаллографической системы координат относительно единичного вектора  $\vec{e}_3$ , являющегося вектором внутренней нормали к лицевой грани кристалла. Угол нутации  $\beta$  определяет величину поворота кристаллографической системы координат относительно рабочей системы координат вокруг оси  $L$ , а угол собственного вращения  $\gamma$  характеризует поворот непосредственно самой кристаллографической системы координат относительно ее оси  $\vec{c}$ . При этом ориентация плоскости среза кристалла в пространстве



**Рисунок 1 – Использование углов Эйлера для задания произвольного среза кристалла**

характеризуется единичным вектором внешней нормали  $\vec{N}$  к его лицевой грани ( $\vec{N} = -\vec{e}_3$ ).

Из анализа рисунка 1 следует, что для задания всевозможных кристаллических срезов достаточно изменения угла  $\beta$  в пределах от 0 до  $180^\circ$ , а угла  $\gamma$  – от 0 до  $360^\circ$ . При этом связь ортонормированных векторов рабочей и кристаллографической систем координат может быть легко получена из чисто геометрических соображений или путем перемножения в обратном порядке (в силу некоммутативности углов Эйлера) матриц элементарных поворотов (см., например, [3, 4]).

Для наглядной характеристики максимальных изменений значений компонент тензора обратной диэлектрической проницаемости, полученных путем перебора всех возможных значений ориентационного угла  $\theta$ , построим указательные поверхности величин  $\Delta B_{mn}^{\max}$  как функций углов  $\beta$  и  $\gamma$ . При этом вычисляемая величина  $\Delta B_{mn}^{\max}$ , соответствующая выбранному срезу, будет откладываться вдоль вектора  $\vec{N}$ .

Направим единичный вектор  $\vec{n}$  вдоль вектора  $[\vec{e}_1 \vec{e}_3]$  (рисунок 1). В этом случае его координаты в кристаллографической системе в общем виде будут определяться выражениями

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin\theta \cos\gamma - \cos\theta \cos\beta \sin\gamma, \\ n_2 &= -\sin\theta \sin\gamma - \cos\theta \cos\beta \cos\gamma, \\ n_3 &= \cos\theta \sin\beta. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что угол  $\alpha$  равен ориентационному углу кристалла  $\theta$ , взятому с противоположным знаком ( $\alpha = -\theta$ ). Используя данные выражения, не представляет трудности найти максимальное изменение компонент тензора обратной диэлектрической проницаемости при произвольном срезе кристалла. В частности, на рисунках 2 и 3 изображены подобные графические зависимости для кристалла  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (ВТО) с учетом его параметров, взятых из [5].

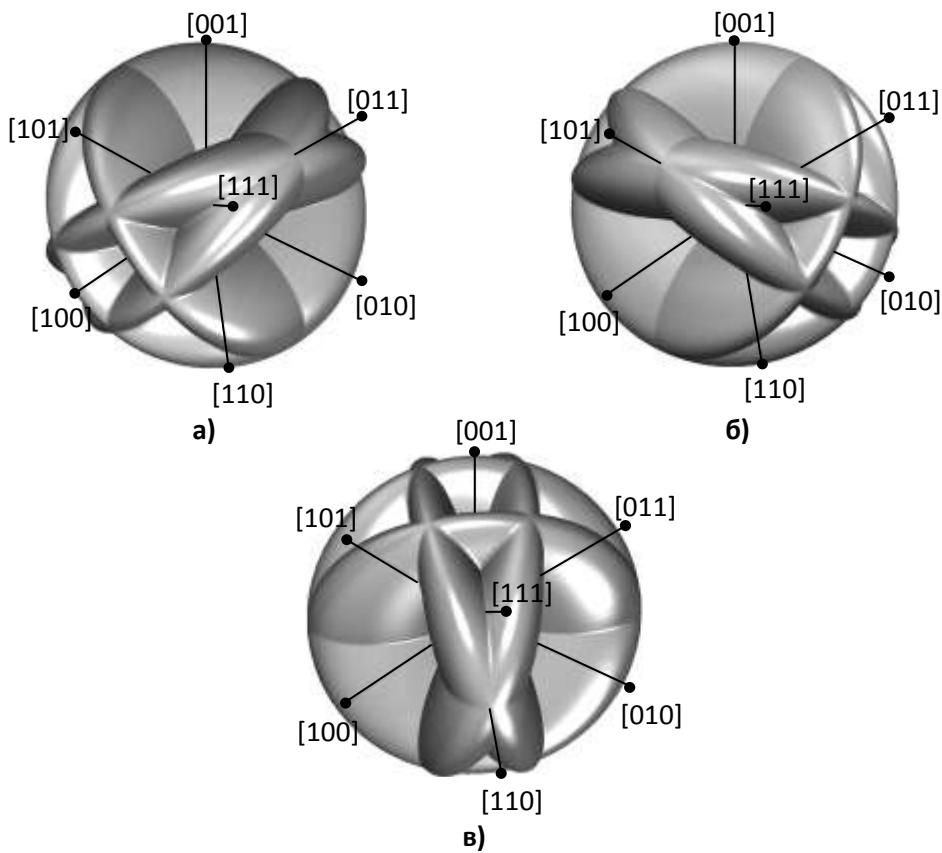
Анализ поверхностей, изображенных на рисунке 2 показывает, что максимальное изменение компонент обратного тензора диэлектрической проницаемости  $\Delta B_{11}^{\max}$ ,  $\Delta B_{22}^{\max}$ ,  $\Delta B_{33}^{\max}$  в случае произвольного среза кристалла ВТО характеризуются одной осью симметрии четвертого порядка и четырьмя осями симметрии второго порядка. В частности, максимальное изменение компоненты  $\Delta B_{11}^{\max}$  при произвольном срезе кристалла имеет пространственную ось симметрии четвертого порядка, проходящую вдоль кристаллографического направления  $[100]$ , и четыре оси симметрии второго порядка, совпадающие с направлениями  $[010]$ ,  $[011]$ ,  $[001]$  и  $[0\bar{1}1]$ . В случае  $\Delta B_{22}^{\max}$  и  $\Delta B_{33}^{\max}$  оси симметрии четвертого порядка совпадают с направлениями  $[010]$  и  $[001]$  соответственно, а оси второго порядка проходят вдоль кристаллографических направлений  $[001]$ ,  $[101]$ ,  $[001]$  и  $[\bar{1}01]$  для  $\Delta B_{22}^{\max}$  и  $[100]$ ,  $[110]$ ,  $[010]$ ,  $[\bar{1}10]$  в случае  $\Delta B_{33}^{\max}$ .

В случае рассмотрения максимального изменения компонент  $\Delta B_{23}^{\max}$ ,  $\Delta B_{13}^{\max}$ ,  $\Delta B_{12}^{\max}$  и соответственно равных им  $\Delta B_{32}^{\max}$ ,  $\Delta B_{31}^{\max}$ ,  $\Delta B_{21}^{\max}$  наблюдается четко выраженная симметрия относительно определенного кристаллографического направления (рисунок 3).

Также укажем, что графические зависимости ориентационных углов  $\theta$ , при которых образуются представленные на рисунках 2 и 3 указательные поверхности, от углов  $\beta$  и  $\gamma$  для каждой из рассмотренных компонент имеют сложный скачкообразный характер и в рамках данной работы не приводятся.

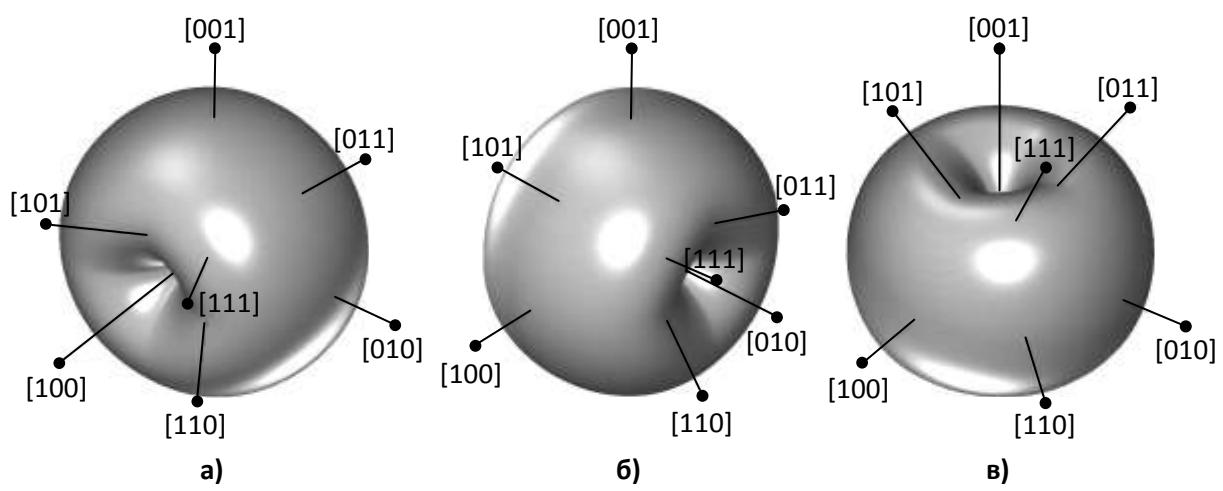
В заключение отметим, что указательные поверхности максимального изменения компонент тензора обратной диэлектрической проницаемости не меняют качественно своей формы при изменении амплитуды решетки электрического поля пространственного заряда, образуя множество пространственно подобных фигур.

Работа выполнена при поддержке Государственной комплексной программы научных исследований «Электроника и фотоника», задание 2.2.09, а также БРФФИ и РФФИ (проекты № Ф12Р-222 и № 12-02-90038-Бел\_a соответственно).



а)  $\Delta B_{11}^{\max}$ , б)  $\Delta B_{22}^{\max}$ , в)  $\Delta B_{33}^{\max}$

**Рисунок 2 – Максимальное изменение компонент обратного тензора диэлектрической проницаемости для кристалла ВТО произвольного среза**



а)  $\Delta B_{23}^{\max} = \Delta B_{32}^{\max}$ , б)  $\Delta B_{13}^{\max} = \Delta B_{31}^{\max}$ , в)  $\Delta B_{12}^{\max} = \Delta B_{21}^{\max}$

**Рисунок 3 – Максимальное изменение компонент обратного тензора диэлектрической проницаемости для кристалла ВТО произвольного среза**

#### Литература

1. Шепелевич, В.В. Голография в фоторефрактивных оптически активных кристаллах: монография / В.В. Шепелевич; Мозыр. гос. пед. ун-т [и др.]. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – 254 с.
2. Шандаров С.М. Изменение тензора диэлектрической проницаемости в кубических фоторефрактивных кристаллах под действием электрического поля голограммической решетки /

С.М. Шандаров, В.В. Шепелевич, Н.Д. Хатьков // Оптика и спектроскопия. – 1991. – Т. 70, № 5. – С. 1068–1073.

3. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

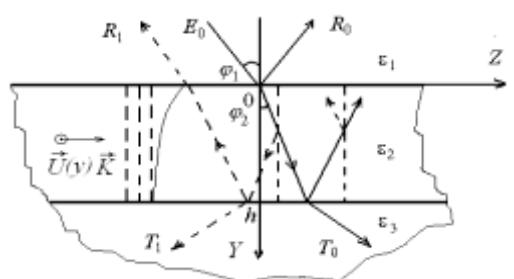
4. Берёзкин, Е.Н. Курс теоретической механики / Е.Н. Берёзкин. – 2-е изд., пер. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 641 с.

5. Shamonina, E. Diffusion recording in photorefractive selenite crystals: an analytical approach for engineering purposes / E. Shamonina, Hu Yi, V.P. Kamenov [et al.] // Opt. Commun. – 2000. – Vol. 180, №1-3. – P. 183–190.

**Т. В. Николаенко**

### АКУСТООПТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА ВОЛН ГУЛЯЕВА-БЛЮСТЕЙНА

Плоскопараллельный слой толщиной  $h$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$  расположен между однородными прозрачными срезами с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_3$  (рисунок 1). Начало системы координат XYZ расположено на верхней границе слоя, а ось Y перпендикулярна границе слоя.



**Рисунок 1 – Схема АО диагностики волн Гуляева-Блюстейна**

Кубические кристаллы арсенида галлия ( $GaAs$ ), широко используемые в акустоэлектронике и оптоэлектронике [5, 6], относятся к классу симметрии  $43m$ . Предполагается, что пьезоактивная ПАВ распространяется вдоль оси [110] в плоскости  $(\bar{1}10)$ . При этом в волне ГБ присутствуют две компоненты тензора деформаций  $U_5$  и  $U_6$ ; им соответствуют компоненты напряженности пьезоэлектрического поля ультразвуковой волны  $E_3$  и  $E_2$ . Для световой волны TE-поляризации, падающей на поверхность кристалла, представляют интерес компоненты деформации  $U_6$  и напряженности

пьезоэлектрического поля  $E_2$ , которые даются соотношениями [2]:

$$\begin{aligned} U_6 &= A_1 K [\alpha_1 \exp(-\alpha_1 K_y) + a_{21} \alpha_2 \exp(-\alpha_2 K_y)] \exp[i(K_z - \Omega t)], \\ E_2 &= -A_1 K [b_{11} \alpha_1 \exp(-\alpha_1 K_y) + a_{21} b_{22} \alpha_2 \exp(-\alpha_2 K_y)] \exp[i(K_z - \Omega t)] \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a_{21} = -1,4758 \cdot 10^1$ ,  $b_{11} = 1,8512 \cdot 10^{11}$ ,  $b_{22} = 1,6436 \cdot 10^9$ ,  $\alpha_1 = 0,9912$ ,  $\alpha_2 = 3,3879 \cdot 10^{-4}$ ,  $A_1$  – амплитуда деформаций,  $\Omega(K)$  – круговая частота (волновое число) УЗ волны.

УЗ волна (1) создает периодическую в пространстве и во времени решетку диэлектрической проницаемости вдоль оси Z и пространственно-неоднородную вдоль оси Y.

$$\epsilon_2(y, z, t) = \epsilon_2 + \Delta \epsilon_2(y) \exp[i(K_z - \Omega t)], \quad (2)$$

где  $\Delta \epsilon_2(y) = -\epsilon_2^2 [p_{\phi\phi} U_6(y) + r_{\phi\phi} E_2(y)]$ ,  $p_{\phi\phi}(r_{\phi\phi})$  – эффективная фотоупругая (электрооптическая) постоянная кристалла.

Положим, что плоская световая волна с частотой  $\omega \gg \Omega$  и волновым вектором  $\vec{k}_1 = \vec{e}_y k_{1y} + \vec{e}_z k_{1z}$  ( $k_{1y} = kn_1 \cos \varphi_1$ ,  $k_{1z} = kn_1 \sin \varphi_1$ ,  $k = \omega/c$ ,  $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$ ,  $c$  – скорость света в вакууме), имеет линейную S-поляризацию. Угол преломления  $\varphi_2 = \arcsin(\sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2} \sin \varphi_1)$  и близок к углу Брэгга  $\varphi_2 \approx \varphi_B = \arcsin(K/2k_2)$ , где  $k_2 = kn_2$  ( $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$  – показатель преломления материала звукопровода).

Решение волнового уравнения (см. [7]) для дифрагированного поля электромагнитной волны в соответствии с теоремой Флоке-Блоха ищем в виде [6]:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(y) \exp[i(k_{mz} z - \omega_m t - \pi m/2)], \quad (3)$$

где  $k_{mz} = k_{0z} + mK$ ,  $\omega_m = \omega + m\Omega$ .

При  $k_{0z} \approx K/2$  из совокупности дифрагированных волн (4) следует выделить лишь две наиболее существенные с дифракционными порядками  $m=0$  и  $m=-1$ . Система неоднородных уравнений связанных волн для комплексных амплитуд  $A_0$  и  $A_{-1}$  имеет вид:

$$\frac{d^2 A_0}{dy^2} + k_{0y}^2 A_0 - i \frac{1}{2} \eta(y) k_2^2 A_{-1} = 0, \quad \frac{d^2 A_{-1}}{dy^2} + k_{-1y}^2 A_{-1} + i \frac{1}{2} \eta(y) k_2^2 A_0 = 0, \quad (4)$$

где  $k_{0y} = \sqrt{k_2^2 - k_{0z}^2}$ ,  $k_{-1y} = \sqrt{k_2^2 - k_{-1z}^2}$ ,  $k_{0z} \approx k_{-1z} = k_2 \sin \varphi_B$ ;  $\eta(y) = -n_2^2 [P_{\phi} U_6(y) + r_{\phi} E_2(y)]$ .

С учетом результатов работы [8] решение системы уравнений (5) в брэгговском режиме дифракции можно представить в виде:  $A_0 = (U_2 + U_1)/2$ ,  $A_{-1} = i(U_2 - U_1)/2$ . Величины  $U_{1,2}$  находим из решения уравнений:

$$\frac{d^2 U_{1,2}}{dy^2} + k_2^2 \left[ \cos^2 \varphi_2 \pm \frac{1}{2} \eta(y) \right] U_{1,2} = 0. \quad (5)$$

Решения уравнений (6) в ВКБ – приближении имеют вид [9]:

$$U_{1,2}(y) = C_1^{\pm} e^{ik_2^{\pm}(y)} + C_2^{\pm} e^{-ik_2^{\pm}(y)}, \quad (6)$$

где  $k_2^{\pm} = k_2 y \left\{ \cos \varphi_2 \pm \left[ P_{\phi} \int_0^h U_6(y) dy + r_{\phi} \int_0^h E_2(y) dy \right] / 2y \right\}$ .

Глубина проникновения волны Гуляева-Блюстейна  $\bar{h}$  в подложку значительно выше, чем глубина проникновения ПАВ Рэлея [1, 6]. Для рассматриваемого направления ПАВ в кристалле  $GaAs$  при частоте ультразвука  $f = 1\Gamma\text{Гц}$  она составляет  $\bar{h} \approx 2,5 \text{ мм}$ . Для структуры: воздух– $GaAs$ – $AlGaAs$ , толщина возмущенного слоя из кристалла  $GaAs$ ,  $h \leq \bar{h}$  [5]. Для малых фотоупругих и электрооптических постоянных и при наличии затухания ультразвука в подложке АО взаимодействием в подложке можно пренебречь. Подставив выражения для  $A_0, A_{-1}$  в (3), и применив стандартные граничные условия при  $y=0$  и  $y=h$  (см. напр. [8]), получим систему алгебраических уравнений относительно амплитудных коэффициентов пропускания ( $t_0, t_{-1}$ ) и отражения ( $r_0, r_{-1}$ ) нулевого и первого порядков.

Такая система уравнений может быть решена лишь численными методами. Пренебрегая медленным изменением линейных членов, зависящих от  $Y$ , по сравнению с экспоненциальными, получим, используя (6), систему линейных алгебраических уравнений, решение которой представимо в замкнутой форме.

При выводе выражений для получения коэффициентов отражения и пропускания дифракционных волн предполагалось, что угол Брэгга  $\Phi_B$  – мал. Данное условие выполняется для частот ультразвука, достигающих  $\sim 1\Gamma\text{Гц}$ .

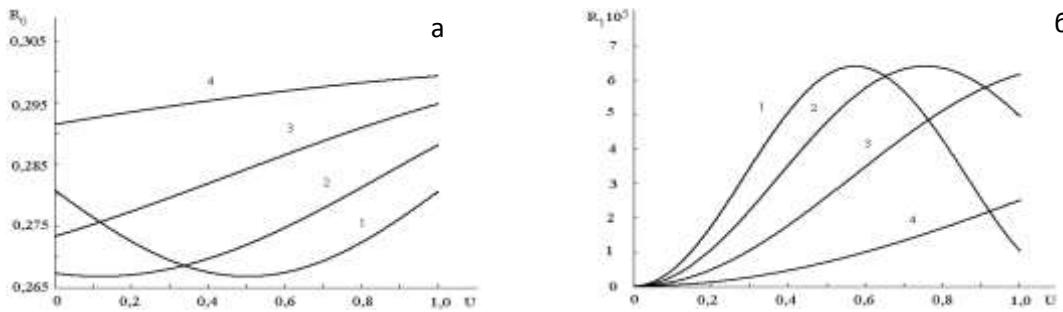
Для численных расчетов использовались энергетические коэффициенты пропускания ( $T_0, T_1$ ) и отражения ( $R_0, R_1$ ), которые находятся из соотношений [10].

При отсутствии ультразвука ( $U = 0$ ) выражения для коэффициентов пропускания  $T_0$  и отражения  $R_0$  приводят к известным формулам Эйри [10], а дифрагированные волны первого порядка отсутствуют ( $T_1=R_1=0$ ). Для согласованного слоя ( $n_1 = n_2 = n_3$ ) получаем, что  $R_0=R_1=0$ ,  $T_0 = \cos^2(kn_2\eta/2)$ ,  $T_1 = \sin^2(kn_2\eta/2)$  [7].

Численные расчеты проводились для многослойной структуры: воздух –  $GaAs$  –  $AlGaAs$  [2]. При этом волна Гуляева-Блюстейна частотой  $f=\Omega/2\pi=1\Gamma\text{Гц}$  концентрируется в слое  $GaAs$ . Длина световой волны в вакууме  $\lambda_0 = 1,15 \text{ мкм}$ , амплитуда тензора деформаций  $U = \sqrt{2I_a/\rho v^3}$ , где  $I_a$  – интенсивность УЗ волны;  $p_{\phi}=p_{44}$  ( $r_{\phi}=r_{14}$ ) – эффективная фотоупругая (электрооптическая) постоянная.

Зависимости коэффициентов отражения  $R_0$  ( $R_1$ ) дифрагированных волн нулевого (минус первого) порядка от амплитуды модуляции  $U$  и толщины слоя  $h$  представлены на рис. 2 а,б.

Малый коэффициент отражения дифрагированной волны минус первого порядка ( $R_1$ ) объясняется незначительным отличием показателей преломления слоя и подложки для гетероструктуры  $GaAs - AlGaAs$ . Коэффициенты отражения дифрагированных волн нулевого порядка ( $R_0$ ) достигают  $\sim 0,3$  при  $h=0,4$  мм. Наиболее существенные изменения  $R_0$  наблюдаются для малых толщин слоя  $h \leq 0,2$  мм. При этом зависимости  $R_0(U)$  имеют минимум. Рассмотренные особенности коэффициента отражения  $R_0$  могут быть использованы для диагностики ультразвуковых волн Гуляева-Блюстейна в слоистых пьезоэлектрических материалах.



**Рисунок 2 – Зависимость энергетического коэффициента отражения дифрагированной волны нулевого порядка  $R_0$  (а) и первого порядка  $R_1$  (б) для различных толщин модулированного слоя  $h$ : 0,1(1), 0,2 (2), 0,3 (3), 0,4 мм (4) (воздух –  $GaAs - AlGaAs$ ,  $f = 1\text{ГГц}$ ,  $\lambda_0 = 1,15\text{ мкм}$ ).**

#### Литература

1. Дельсан, Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки / Э. Дельсан, Д. Руайе/ – М.: Наука, 1982. – 424 с.
2. Bright, V.M. Acousto-optic interactions between optical waves and Bleustein-Gulyev surface acoustic waves in gallium arsenide and other piezoelectric cubic crystals. / V.M. Bright, W.D. Hunt // J. Appl. Phys. - V. 67, №2. – P. 654 – 662.
3. Кулак, Дифракция света на ультразвуке в кристаллах парателлурида в условиях френелевского отражения. / Г.В. Кулак, Т.В. Николаенко //Журн. прикл. спектр. – 2006. – Т. 73, № 6. – С. 819 – 823.
4. Комоцкий, В.А. Методика и результаты измерения коэффициентов отражения поверхностных акустических волн с применением лазерного зондирования. / В.А. Комоцкий, С.М. Окот, Ю.М. Соколов. // Радиот. и электрон. – 2007. – Т. 52, № 8. – С. 1006-1012.
5. Акустические кристаллы. Справочник. / Под ред. Шаскольской М.П. – М.: Наука, 1986. – 629 с.
6. Викторов, И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах./ И.А. Викторов, – М.: Наука, 1981. – 287 с.
7. Балакший, В.И. Физические основы акустооптики. / В.И. Балакший, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков, – М.: Радио и связь, 1985. – 280 с.
8. Kong, J. A. Second-order coupled-mode equations for spatially periodic media. / J.A. Kong // J. Opt. Soc. Am. – 1977. – V. 67. № 6. – P. 825-829.
9. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. / Э. Камке; Пер. с нем. – М.: Наука. 1971. – 576 с.
10. Борн, М. Основы оптики / Борн М., Вольф Э. – М.: Наука. – 1973. – 719 с.

**Е. М. Овсиюк, О. В. Веко, К. В. Казмерчук**

#### **ОБ УРАВНЕНИИ КОКСА ДЛЯ СКАЛЯРНОЙ ЧАСТИЦЫ С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ**

В 1982 г. Кокс построил обобщенную систему уравнений первого порядка, которая, как оказалось [1], описывает скалярную частицу с внутренней структурой, проявляющейся во внешних электромагнитных полях. Он исходил из идеи построения нового волнового уравнения для скалярной частицы при использовании большего набора тензорных функций, чем в подходе Прока. Кокс использовал набор из скаляра, 4-вектора, антисимметричного и

(неприводимого) симметричного тензоров, таким образом, исходил из 20-компонентной волновой функции. Будем использовать обобщенную систему типа Прока, полученную после исключения из исходной системы уравнений Кокса двух тензоров второго ранга. Исследуем эту систему уравнений при наличии внешних гравитационных полей, описываемых в рамках искривленной пространственно-временной геометрии [2].

Будем исходить из полной системы уравнений Кокса [3] для частицы со спином 0, включающей дополнительные симметричный и антисимметричный тензоры:

$$\begin{aligned} \lambda_1 D^\beta \Phi_\beta - \mu \Phi &= 0, \\ \lambda_1^* D_\beta \Phi + \lambda_2 D^\alpha \Phi_{[\alpha\beta]} - \lambda_3 D^\alpha \Phi_{(\alpha\beta)} - \mu \Phi_\beta &= 0, \\ \lambda_2^* (D_\alpha \Phi_\beta - D_\beta \Phi_\alpha) - \mu \Phi_{[\alpha\beta]} &= 0, \\ \lambda_3^* (D_\alpha \Phi_\beta + D_\beta \Phi_\alpha - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} D^\rho \Phi_\rho) - \mu \Phi_{(\alpha\beta)} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где вспомогательные числовые параметры  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  подчиняются условиям связи

$$\lambda_2 \lambda_2^* - \lambda_3 \lambda_3^* = 0, \quad \lambda_1 \lambda_1^* - \frac{3}{2} \lambda_3 \lambda_3^* = 1; \quad (2)$$

символ  $D_\alpha$  обозначает производную, учитывающую присутствие внешних электромагнитного и гравитационного полей

$$D = i\hbar \nabla_\alpha - i \frac{e}{c} A_\alpha, \quad \mu = Mc.$$

С помощью третьего и четвертого уравнений в (1) исключим тензорные компоненты

$$\begin{aligned} \mu^{-1} (\lambda_2^* (D_\alpha \Phi_\beta - D_\beta \Phi_\alpha)) &= \Phi_{[\alpha\beta]}, \\ \mu^{-1} \left( \lambda_3^* (D_\alpha \Phi_\beta + D_\beta \Phi_\alpha - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} D^\rho \Phi_\rho) \right) &= \Phi_{(\alpha\beta)} \end{aligned} \quad (3)$$

из оставшихся двух:

$$\lambda_1 D^\beta \Phi_\beta - \mu \Phi = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1^* D_\beta \Phi + \lambda_2 D^\alpha \mu^{-1} [\lambda_2^* (D_\alpha \Phi_\beta - D_\beta \Phi_\alpha)] - \\ - \lambda_3 D^\alpha \mu^{-1} \left( \lambda_3^* (D_\alpha \Phi_\beta + D_\beta \Phi_\alpha - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} D^\rho \Phi_\rho) \right) - \mu \Phi_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Выполним преобразования в (5):

$$\begin{aligned} \lambda_1^* D_\beta \Phi + \mu^{-1} \lambda_2 \lambda_2^* \left( \underline{D^\alpha D_\alpha \Phi_\beta} - D^\alpha D_\beta \Phi_\alpha \right) - \\ - \mu^{-1} \lambda_3 \lambda_3^* \left( \underline{D^\alpha D_\alpha \Phi_\beta} + D^\alpha D_\beta \Phi_\alpha - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} D^\alpha D^\rho \Phi_\rho \right) - \mu \Phi_\beta &= 0; \end{aligned} \quad (6a)$$

подчеркнутые члены с учетом (2) сокращаются:

$$\begin{aligned} \lambda_1^* D_\beta \Phi - \mu^{-1} (\lambda_2 \lambda_2^* + \lambda_3 \lambda_3^*) D^\alpha D_\beta \Phi_\alpha + \\ + \frac{1}{2} \mu^{-1} \lambda_3 \lambda_3^* D_\beta D^\rho \Phi_\rho - \mu \Phi_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (6b)$$

С учетом (2) возможна замена:

$$(\lambda_2 \lambda_2^* + \lambda_3 \lambda_3^*) = 2 \lambda_3 \lambda_3^*$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \lambda_1^* D_\beta \Phi - \mu^{-1} 2 \lambda_3 \lambda_3^* D_\alpha D_\beta \Phi^\alpha + \\ + \frac{1}{2} \mu^{-1} \lambda_3 \lambda_3^* D_\beta D_\alpha \Phi^\alpha - \mu \Phi_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (6c)$$

Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} D_\alpha D_\beta \Phi^\alpha &= D_\beta D_\alpha \Phi^\alpha + (D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha) \Phi^\alpha = \\ &= D_\beta D_\alpha \Phi^\alpha + \hbar^2 \left( -i \frac{e}{\hbar c} F_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta} \right) \Phi^{\alpha\alpha}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение (6b) можно преобразовать в следующее:

$$\begin{aligned} \lambda_1^* D_\beta \Phi - \mu^{-1} 2 \lambda_3 \lambda_3^* \left[ D_\beta D_\alpha \Phi^\alpha + \hbar^2 \left( -i \frac{e}{\hbar c} F_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta} \right) \Phi^{\alpha\alpha} \right] + \\ + \frac{1}{2} \mu^{-1} \lambda_3 \lambda_3^* D_\beta D_\alpha \Phi^\alpha - \mu \Phi_\beta = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \lambda_1^* D_\beta \Phi + \mu^{-1} 2 \lambda_3 \lambda_3^* \hbar^2 \left( i \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} \right) \Phi^\alpha - \\ - \frac{3}{2} \mu^{-1} \lambda_3 \lambda_3^* D_\beta (D_\alpha \Phi^\alpha) - \mu \Phi_\beta = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Учтем уравнение (4):

$$\begin{aligned} D_\alpha \Phi^\alpha &= \frac{\mu}{\lambda_1} \Phi; \\ \lambda_1 \lambda_1^* D_\beta \Phi + \mu^{-1} 2 \lambda_3 \lambda_3^* \hbar^2 \left( i \frac{e}{\hbar c} F_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} \right) \lambda_1 \Phi^\alpha - \\ - \frac{3}{2} \lambda_3 \lambda_3^* D_\beta \Phi - \mu \lambda_1 \Phi_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (9a)$$

Используя второе условие в (2)

$$\lambda_1 \lambda_1^* - \frac{3}{2} \lambda_3 \lambda_3^* = 1,$$

уравнение (9a) упрощаем

$$D_\beta \Phi + \mu^{-1} 2 \lambda_3 \lambda_3^* \hbar^2 \left( i \frac{e}{\hbar c} F_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} \right) \lambda_1 \Phi^\alpha - \mu \lambda_1 \Phi_\beta = 0. \quad (9b)$$

Вспоминаем об уравнении (4):

$$\lambda_1 D^\beta \Phi_\beta - \mu \Phi = 0. \quad (9c)$$

Параметр  $\lambda_1$  можно внести в обозначение векторной компоненты

$$\lambda_1 \Phi_1 \longrightarrow \Phi_1.$$

Так, приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} D^\beta \Phi_\beta - \mu \Phi &= 0, \\ D_\beta \Phi - i \frac{\hbar^2}{Mc} (2 \lambda_3 \lambda_3^*) \left( \frac{e}{\hbar c} F_{\beta\alpha} + i R_{\beta\alpha} \right) \Phi^\alpha - \mu \Phi_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Система (10) учитывает неминимальное взаимодействие скалярной частицы Кокса с внешним геометрическим фоном через тензор Риччи.

Дальше будем использовать параметр

$$\lambda = \frac{\hbar^2}{Mc} \frac{e}{\hbar c} (2 i \lambda_3 \lambda_3^*). \quad (11)$$

Уравнения (10) можно переписать так:

$$\begin{aligned} D^\beta \Phi_\beta - \mu \Phi &= 0, \\ D_\beta \Phi - \lambda \left( F_{\beta\alpha} + i \frac{\hbar c}{e} R_{\beta\alpha} \right) \Phi^\alpha - \mu \Phi_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В отсутствие электромагнитного поля уравнения (12) упрощаются (напоминаем, что  $i\lambda$  – вещественный параметр)

$$D^\beta \Phi_\beta = \mu \Phi, \\ D_\beta \Phi = \left( i\lambda \frac{\hbar c}{e} R_{\beta\alpha}(x) + \mu g_{\beta\alpha}(x) \right) \Phi^\alpha. \quad (13)$$

Это чисто геометрическая модификация теории скалярной частицы в подходе Кокса.

Представим уравнения (12) в виде (напоминаем, что  $\lambda^* = -\lambda$ ; временно коэффициент  $\hbar c/e$  внесем в обозначение тензора Риччи):

$$D^\beta \Phi_\beta = \mu \Phi, \\ [\mu \delta_\alpha^\beta + \lambda (F_\alpha^\beta + iR_\alpha^\beta)] \Phi_\beta = D_\alpha \Phi. \quad (14)$$

С использованием обозначения

$$\Lambda_\alpha^\beta = \mu \delta_\alpha^\beta + \lambda (F_\alpha^\beta + iR_\alpha^\beta) \quad (15a)$$

уравнения (14) можно записать так:

$$\Phi_\rho = (\Lambda^{-1})_\rho^\alpha D_\alpha \Phi, \quad D^\rho \Phi_\rho = \mu \Phi, \quad (15b)$$

и дальше следует обобщенное скалярное уравнение

$$(D^\rho (\Lambda^{-1})_\rho^\alpha (x) D_\alpha - \mu) \Phi(x) = 0. \quad (16)$$

Поскольку характеристическое уравнение (см. гл. IV в [4]) для матрицы

$$F_\alpha^\beta + iR_\alpha^\beta = G_\alpha^\beta, \\ G^4 = g_0 + g_1 G + g_2 G^2 + g_3 G^3 \quad (17a)$$

позволяет выразить четвертую степень матрицы  $G_\alpha^\beta$  через  $G^0, G, G^2, G^3$ , то можно искать обратную матрицу в виде:

$$(\Lambda^{-1})_\rho^\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 G + \lambda_2 G^2 + \lambda_3 G^3. \quad (17b)$$

Из уравнения  $\Lambda \Lambda^{-1} = I$ :

$$I = (\mu + \lambda G)(\lambda_0 + \lambda_1 G + \lambda_2 G^2 + \lambda_3 G^3) = \\ = \mu \lambda_0 + \mu \lambda_1 G + \mu \lambda_2 G^2 + \mu \lambda_3 G^3 + \\ + \lambda \lambda_0 G + \lambda \lambda_1 G^2 + \lambda \lambda_2 G^3 + \lambda \lambda_3 (g_0 + g_1 G + g_2 G^2 + g_3 G^3)$$

получаем линейную систему уравнений

$$G^0: \quad \mu \lambda_0 + \lambda \lambda_3 g_0 = 1, \\ G: \quad \mu \lambda_1 + \lambda \lambda_0 + \lambda \lambda_3 g_1 = 0, \\ G^2: \quad \mu \lambda_2 + \lambda \lambda_1 + \lambda \lambda_3 g_2 = 0, \\ G^3: \quad \mu \lambda_3 + \lambda \lambda_2 + \lambda \lambda_3 g_3 = 0. \quad (18a)$$

Представим систему в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \lambda g_0 \\ \lambda & \mu & 0 & \lambda g_1 \\ 0 & \lambda & \mu & \lambda g_2 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu + \lambda g_3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (18b)$$

Ее решение следующее:

$$\lambda_0 = -\frac{\mu^3 + \mu^2 \lambda g_3 - \mu \lambda^2 g_2 + \lambda^3 g_1}{-\mu^4 - \mu^3 \lambda g_3 + \mu^2 \lambda^2 g_2 - \mu \lambda^3 g_1 + \lambda^4 g_0}, \\ \lambda_1 = -\frac{-\mu^2 \lambda - \mu \lambda^2 g_3 + \lambda^3 g_2}{-\mu^4 - \mu^3 \lambda g_3 + \mu^2 \lambda^2 g_2 - \mu \lambda^3 g_1 + \lambda^4 g_0},$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= -\frac{\mu\lambda^2 + \lambda^3 g_3}{-\mu^4 - \mu^3 \lambda g_3 + \mu^2 \lambda^2 g_2 - \mu \lambda^3 g_1 + \lambda^4 g_0}, \\ \lambda_3 &= -\frac{-\lambda^3}{-\mu^4 - \mu^3 \lambda g_3 + \mu^2 \lambda^2 g_2 - \mu \lambda^3 g_1 + \lambda^4 g_0}.\end{aligned}\quad (19)$$

Для дальнейшего удобно изменить обозначения:

$$\begin{aligned}g_0 &= p_4, & g_1 &= p_3, & g_2 &= p_2, & g_3 &= p_1, \\ G^4 &= +p_1G^3 + p_2G^2 + p_3G + p_4,\end{aligned}\quad (20)$$

тогда

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{\mu^3 + \mu^2 \lambda p_1 - \mu \lambda^2 p_2 + \lambda^3 p_3}{\mu^4 + \mu^3 \lambda p_1 - \mu^2 \lambda^2 p_2 + \mu \lambda^3 p_3 - \lambda^4 p_4}, \\ \lambda_1 &= \frac{-\mu^2 \lambda - \mu \lambda^2 p_1 + \lambda^3 p_2}{\mu^4 + \mu^3 \lambda p_1 - \mu^2 \lambda^2 p_2 + \mu \lambda^3 p_3 - \lambda^4 p_4}, \\ \lambda_2 &= \frac{\mu \lambda^2 + \lambda^3 p_1}{\mu^4 + \mu^3 \lambda p_1 - \mu^2 \lambda^2 p_2 + \mu \lambda^3 p_3 - \lambda^4 p_4}, \\ \lambda_3 &= \frac{-\lambda^3}{\mu^4 + \mu^3 \lambda p_1 - \mu^2 \lambda^2 p_2 + \mu \lambda^3 p_3 - \lambda^4 p_4};\end{aligned}\quad (21)$$

напоминаем, что

$$(\Lambda^{-1})^\alpha_\rho = \lambda_0 + \lambda_1 G + \lambda_2 G^2 + \lambda_3 G^3.$$

Степеням матрицы  $G$  можно сопоставить следующие инварианты (см. гл. IV в [4]):

$$\begin{aligned}\text{Sp}(G) &= g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = s_1, & s_1 &= G_\alpha^\alpha(x), \\ \text{Sp}(G^2) &= g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2 = s_2, & s_2 &= G_\alpha^\rho(x)G_\rho^\alpha(x), \\ \text{Sp}(G^3) &= g_1^3 + g_2^3 + g_3^3 + g_4^3 = s_3, & s_3 &= G_\alpha^\rho(x)G_\rho^\sigma(x)G_\sigma^\alpha(x), \\ \text{Sp}(G^4) &= g_1^4 + g_2^4 + g_3^4 + g_4^4 = s_4, & s_4 &= G_\alpha^\rho(x)G_\rho^\delta(x)G_\delta^\sigma(x)G_\sigma^\alpha(x);\end{aligned}\quad (22)$$

$g_1, \dots, g_4$  обозначают собственные значения матрицы  $G$ .

Инварианты  $s_i$  и  $p_i$  связаны рекуррентными формулами Ньютона (см. [4]):

$$\begin{aligned}p_1 &= s_1 = \text{Sp}(G), \\ p_2 &= \frac{1}{2}(s_2 - p_1 s_1) = \frac{1}{2}[\text{Sp}(G^2) - p_1 \text{Sp}(G)], \\ p_3 &= \frac{1}{3}(s_3 - p_1 s_2 - p_2 s_1) = \frac{1}{3}[\text{Sp}(G^3) - p_1 \text{Sp}(G^2) - p_2 \text{Sp}(G)], \\ p_4 &= \frac{1}{4}(s_4 - p_1 s_3 - p_2 s_2 - p_3 s_1) = \frac{1}{4}[\text{Sp}(G^4) - p_1 \text{Sp}(G^3) - p_2 \text{Sp}(G^2) - p_3 \text{Sp}(G)].\end{aligned}$$

Отсюда следуют следующие представления для инвариантов  $p_i$ :

$$p_1 = \text{Sp}(G), \quad (23a)$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \text{Sp}(G^2) - \frac{1}{2} \text{Sp}^2(G), \quad (23b)$$

$$\begin{aligned}p_3 &= \frac{1}{3} \left[ \text{Sp}(G^3) - \text{Sp}(G)\text{Sp}(G^2) - \frac{1}{2} (\text{Sp}(G^2) - \text{Sp}^2(G))\text{Sp}(G) \right] = \\ &= \frac{1}{3} \text{Sp}(G^3) - \frac{1}{2} \text{Sp}(G^2)\text{Sp}(G) + \frac{1}{6} \text{Sp}^3(G),\end{aligned}\quad (23c)$$

$$\begin{aligned}
p_4 &= \frac{1}{4} \left[ \text{Sp}(G^4) - \text{Sp}(G)\text{Sp}(G^3) - \frac{1}{2} (\text{Sp}(G^2) - \text{Sp}^2(G))\text{Sp}(G^2) - p_3\text{Sp}(G) \right] = \\
&= \frac{1}{4} \left[ \text{Sp}(G^4) - \text{Sp}(G)\text{Sp}(G^3) - \frac{1}{2}\text{Sp}^2(G^2) + \frac{1}{2}\text{Sp}^2(G)\text{Sp}(G^2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3}\text{Sp}(G^3)\text{Sp}(G) + \frac{1}{2}\text{Sp}(G^2)\text{Sp}^2(G) - \frac{1}{6}\text{Sp}^3(G)\text{Sp}(G) \right],
\end{aligned}$$

окончательно для  $p_4$  находим выражение

$$p_4 = \frac{1}{4} \left[ \text{Sp}(G^4) - \frac{4}{3}\text{Sp}(G)\text{Sp}(G^3) - \frac{1}{2}\text{Sp}^2(G^2) + \text{Sp}^2(G)\text{Sp}(G^2) - \frac{1}{6}\text{Sp}^4(G) \right]. \quad (23d)$$

В случае, если матрица  $G$  антисимметрична, выполняются равенства:

$$\begin{aligned}
\tilde{G} &= -G, & p_1 &= \text{Sp}G = 0, & G^3 &= -G^3, & \text{Sp}(G^3) &= 0, \\
p_1 &= 0, & p_2 &= \frac{1}{2}\text{Sp}(G^2), & p_3 &= 0, & p_4 &= \frac{1}{4}\text{Sp}(G^4) + \frac{1}{8}\text{Sp}^2(G^2)
\end{aligned} \quad (24a)$$

и характеристическое уравнение принимает вид:

$$G^4 - p_2G^2 - p_4 = 0 ; \quad (24b)$$

именно этот случай реализуется при построении характеристического многочлена для электромагнитного тензора. При этом (21) принимают вид:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{\mu^3 - \mu\lambda^2 p_2}{\mu^4 - \mu^2\lambda^2 p_2 - \lambda^4 p_4}, \\
\lambda_1 &= \frac{-\mu^2\lambda + \lambda^3 p_2}{\mu^4 - \mu^2\lambda^2 p_2 - \lambda^4 p_4}, \\
\lambda_2 &= \frac{\mu\lambda^2}{\mu^4 - \mu^2\lambda^2 p_2 - \lambda^4 p_4}, \\
\lambda_3 &= \frac{-\lambda^3}{\mu^4 - \mu^2\lambda^2 p_2 - \lambda^4 p_4}.
\end{aligned} \quad (24c)$$

Для дополнительной проверки рассмотрим простой случай: когда пространство-время описывается тензором Риччи вида (элементарными примерами являются пространства де Ситтера):

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} &= \frac{R}{4}g_{\alpha\beta}, & G_\alpha^\beta &= \frac{R}{4}\delta_\alpha^\beta, \\
\text{Sp}G &= R, & \text{Sp}(G^2) &= \frac{1}{4}R^2, & \text{Sp}(G^3) &= \frac{1}{4^2}R^3, & \text{Sp}(G^4) &= \frac{1}{4^3}R^4,
\end{aligned} \quad (25a)$$

т. е.

$$\begin{aligned}
p_1 &= R, \\
p_2 &= \frac{1}{2}\frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{2}R^2 = -\frac{3}{8}R^2, \\
p_3 &= \frac{1}{3}\frac{1}{16}R^3 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}R^2R + \frac{1}{6}R^3 = \frac{1}{16}R^3, \\
p_4 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{16 \cdot 4}R^4 - \frac{4}{3}R\frac{1}{16}R^3 - \frac{1}{2}\frac{1}{16}R^4 + R^2\frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{6}R^4 \right] = -\frac{1}{4^4}R^4.
\end{aligned} \quad (25b)$$

Полученные выражения для  $p_i$  отвечают следующему характеристическому уравнению:

$$G = (G_\alpha^\beta), \quad (G - \frac{R}{4})^4 = 0. \quad (25c)$$

Отметим, что в случае присутствия именно такого геометрического фона

$$D^\beta \Phi_\beta - \mu \Phi = 0,$$

$$D_\beta \Phi - \lambda \left( F_{\beta\alpha} + i \frac{\hbar c}{e} \frac{R(x)}{4} g_{\beta\alpha}(x) \right) \Phi^\alpha - \mu \Phi_\beta = 0 \quad (26)$$

и при отсутствии внешнего электромагнитного поля система уравнений примет вид:

$$D^\beta \Phi_\beta = Mc\Phi,$$

$$D_\beta \Phi = \left( Mc + i\lambda \frac{\hbar c}{e} \frac{R(x)}{4} \right) \Phi_\beta. \quad (27)$$

Полученная модификация уравнений Прока (27) существенно отличается от неминимальной системы уравнений Прока для безмассовой частицы, которая в безмассовом случае обеспечивает конформную инвариантность волнового уравнения<sup>1</sup>:

$$i \nabla_\alpha \Phi = \frac{mc}{\hbar} \Phi_\alpha,$$

$$i \nabla_\alpha \Phi^\alpha = \frac{mc}{\hbar} \left( 1 + \sigma \frac{R(x)}{m^2 c^2 / \hbar^2} \right) \Phi. \quad (28)$$

В частности, в случае пространств де Ситтера ( $R(x) = R$ ) уравнение (27) примет вид (появляется эффективная добавка со знаком плюс или минус к массе частицы):

$$D^\beta \Phi_\beta = Mc\Phi, \quad D_\beta \Phi = \left( Mc + i\lambda \frac{\hbar c}{e} \frac{R}{4} \right) \Phi_\beta. \quad (29)$$

Таким образом, скалярная частица с внутренней структурой Кокса оказывается очень чувствительной к геометрии, в частности, к тензору Риччи пространства–времени. Обобщенное скалярное уравнение типа Клейна–Фока–Гордона для такой частицы оказывается очень сложным, гораздо более простым представляется использование обобщенной системы уравнений первого порядка типа Прока.

*Авторы благодарны В.В. Киселю и В.М. Редькову за обсуждение работы и полезные советы. Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ (Беларусь–Украина), проект Ф13К-079 (2013–2015 гг.).*

### Литература

1. Кисель, В.В. Точные решения уравнения Кокса для частицы со спином 0 во внешних электромагнитных полях / В.В. Кисель // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2000. – № 2. – С. 82–85.
2. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 486 с.
3. Cox, W. / W. Cox // J. Phys. Math. Gen. – 1982. – Vol. 15, no 2. – P. 627–635.
4. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 4-е изд. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
5. Cunningham, E. The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof / E. Cunningham // Proc. London Math. Soc. – 1909. – Vol. 8. – P. 77–98.
6. Bateman, H. On the conformal transformations of the space of four dimensional and their applications to geometric optics / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. – 1909. – Vol. 7. – P. 70–92.
- 7 Pauli, W. Über die Invarianz der Dirac'schen Wellengleichungen gegenüber Ähnlichkeitstransformationen des Linienelementes im Fall verschwindender Ruhmasse / W. Pauli // Helv. Phys. Acta. – 1940. – Bd. 13. – S. 204–208.
8. Gürsey, F. On a conform invariant spinor wave equation / F. Gürsey // Nuovo Cim. – 1956. – Vol. 3, no 10. – P. 988–1006.
9. Gürsey, F. On some conform invariant worldlines / F. Gürsey // Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul. A. – 1956. – Vol. 21. – P. 129–142.
10. Gürsey, F. Reformulation of general relativity in accordance with Mach's principle / F. Gürsey // Ann. Phys. – 1963. – Vol. 24. – P. 211–244.

---

<sup>1</sup> Конформная инвариантность уравнений Максвелла была установлена Куиннхэмом [5] и Бейтманом [6], безмассового уравнения Дирака – Паули [7]; специально модифицированного уравнения для безмассовой скалярной частицы – Гюрши [8]–[10].

## ЧАСТИЦА СО СПИНОМ $S = 1/2$ В КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕ СИТТЕРА: ОПИСАНИЕ В НЕСТАТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Пространства де Ситтера и анти де Ситтера привлекают постоянное внимание в контексте развития квантовой теории в искривленном пространстве-времени. Долгую историю имеет вопрос об описании частиц с разными спинами на фоне этих геометрических моделей, и, в частности, задача нахождения точных решений этих уравнений [1]–[26]. Этот пример пространственно-временной геометрии интересен с теоретической точки, поскольку в силу его высокой симметрии много задач классической и квантовой теории поля могут быть доведены до их полных и точных аналитических решений: например, анализ эффекта Хокинга в пространстве де Ситтера. Эта модель пространства интересна и с точки зрения квантовой механики: например, в квантово-механической теории атома водорода на фоне геометрии де Ситтера принципиально невозможно существование стационарных состояний; такое влияние геометрии де Ситтера универсально и проявляется аналогичным образом для всех квантово-механических систем.

Рассмотрим общековариантное уравнение Дирака [27]

$$\left\{ i\gamma^k (e_{(k)}^\alpha \partial_\alpha + B_k) - m \right\} \Psi = 0, \quad B_k(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} e_{(k)}^\alpha \quad (1)$$

в нестатических координатах пространства-времени де Ситтера  $x^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$

$$dS^2 = dt^2 - \cosh^2 t [ dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) ], \quad (2)$$

используя тетраду

$$\begin{aligned} e_{(0)}^\alpha &= (1, 0, 0, 0), & e_{(1)}^\alpha &= (0, 0, \frac{1}{\cosh t \sin r}, 0), \\ e_{(2)}^\alpha &= (0, 0, 0, \frac{1}{\cosh t \sin r \sin \theta}), & e_{(3)}^\alpha &= (0, \frac{1}{\cosh t}, 0, 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (1) примет вид (в волновой функции удобно выделить специальный множитель):

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{1}{\sin r} \frac{1}{\sinh^{3/2} t} \varphi(x), \\ \left[ i\gamma^0 \cosh t \partial_t + i\gamma^3 \partial_r + \frac{1}{\sin r} \Sigma_{\theta\phi} - m \cosh t \right] \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\Sigma_{\theta\phi} = i \gamma^1 \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i \partial_\phi + i \sigma^{12} \cos \theta}{\sin \theta}. \quad (5)$$

Выбираем следующую подстановку для электронной волновой функции (вигнеровские функции обозначаем посредством  $D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0) \equiv D_\sigma$ ):

$$\varphi_{jm}(x) = \begin{vmatrix} f_1(t, r) D_{-1/2} \\ f_2(t, r) D_{+1/2} \\ f_3(t, r) D_{-1/2} \\ f_4(4, r) D_{+1/2} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Используя рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \partial_\theta D_{+1/2} &= a D_{-1/2} - b D_{+3/2}, & \frac{-m-1/2 \cos \theta}{\sin \theta} D_{+1/2} &= -a D_{-1/2} - b D_{+3/2}, \\ \partial_\theta D_{-1/2} &= b D_{-3/2} - a D_{+1/2}, & \frac{-m+1/2 \cos \theta}{\sin \theta} D_{-1/2} &= -b D_{-3/2} - a D_{+1/2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$a = \frac{j+1/2}{2}, \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{(j-1/2)(j+3/2)},$$

приходим к радиальным уравнениям:

$$\begin{aligned} i \cosh t \frac{\partial}{\partial t} f_3 - i \frac{\partial}{\partial r} f_3 - i \frac{\nu}{\sin r} f_4 - m \cosh t f_1 &= 0, \\ i \cosh t \frac{\partial}{\partial t} f_4 + i \frac{\partial}{\partial r} f_4 + i \frac{\nu}{\sin r} f_3 - m \cosh t f_2 &= 0, \\ i \cosh t \frac{\partial}{\partial t} f_1 + i \frac{\partial}{\partial r} f_1 + i \frac{\nu}{\sin r} f_2 - m \cosh t f_3 &= 0, \\ i \cosh t \frac{\partial}{\partial t} f_2 - i \frac{\partial}{\partial r} f_2 - i \frac{\nu}{\sin r} f_1 - m \cosh t f_4 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Обычный оператор  $P$ -отражения в декартовом тетрадном базисе  $\hat{\Pi}_C = i\gamma^0 \otimes \hat{P}$

$$\hat{\Pi}_C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{vmatrix} \otimes \hat{P}, \quad \hat{P}(\theta, \phi) = (\pi - \theta, \phi + \pi)$$

после пересчета к базису сферической тетрады, согласно  $\hat{\Pi}_{sph} = S(\theta, \phi) \hat{\Pi}_C S^{-1}(\theta, \phi)$ , примет вид:

$$\hat{\Pi}_{sph} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \otimes \hat{P}.$$

Из уравнения на собственные значения  $\hat{\Pi}_{sph} \Psi_{jm} = \Pi \Psi_{jm}$  получаем:

$$\Pi = \delta (-1)^{j+1}, \quad \delta = \pm 1, \quad f_4 = \delta f_1, \quad f_3 = \delta f_2; \quad (9)$$

таким образом,

$$\varphi(x)_{jm\delta} = \begin{vmatrix} f_1(t, r) D_{-1/2} \\ f_2(t, r) D_{+1/2} \\ \delta f_2(t, r) D_{-1/2} \\ \delta f_1(t, r) D_{+1/2} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Учитывая (10), упрощаем систему уравнений (8):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\nu}{\sin r} \right) f + \left( i \cosh t \frac{\partial}{\partial t} + \delta m \cosh t \right) g &= 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu}{\sin r} \right) g - \left( i \cosh t \frac{\partial}{\partial t} - \delta m \cosh t \right) f &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где, вместо  $f_1(t, r)$  и  $f_2(t, r)$ , используем их линейные комбинации:  $f(t, r) = (f_1 + f_2)/\sqrt{2}$ ,  $g(t, r) = (f_1 - f_2)/i\sqrt{2}$ . В системе уравнений (11) можно разделить переменные, если ввести подстановки:

$$\begin{aligned} f(t, r) &= f(t)f(r), \quad g(t, r) = g(t)g(r), \\ \frac{1}{g(r)} \left( \frac{d}{dr} + \frac{\nu}{\sin r} \right) f(r) &= -\frac{1}{f(t)} \left( i \cosh t \frac{d}{dt} + \delta m \cosh t \right) g(t) = \lambda, \\ \frac{1}{f(r)} \left( \frac{d}{dr} - \frac{\nu}{\sin r} \right) g(r) &= \frac{1}{g(t)} \left( i \cosh t \frac{d}{dt} - \delta m \cosh t \right) f(t) = \mu. \end{aligned} \quad (12)$$

В результате приходим к двум системам уравнений по разным переменным:

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{\nu}{\sin r} \right) f(r) = \lambda g(r), \quad \left( \frac{d}{dr} - \frac{\nu}{\sin r} \right) g(r) = \mu f(r); \quad (13)$$

$$\left( i \cosh t \frac{d}{dt} + \delta m \cosh t \right) g(t) = -\lambda f(t), \quad \left( i \cosh t \frac{d}{dt} - \delta m \cosh t \right) f(t) = \mu g(t). \quad (14)$$

Дальше в системе (14) для определенности будем рассматривать случай  $\delta = +1$ :

$$\left( i \cosh t \frac{d}{dt} + m \cosh t \right) g(t) = -\lambda f(t), \quad \left( i \cosh t \frac{d}{dt} - m \cosh t \right) f(t) = \mu g(t); \quad (15)$$

вариант с  $\delta = -1$  будет следовать из (15) при выполнении формальной замены  $m \Rightarrow -m$ .

Из (13) исключим функцию  $g(r)$ :

$$g(r) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{d}{dr} + \frac{\nu}{\sin r} \right) f(r), \quad \left( \frac{d^2}{dr^2} - \nu \frac{\cos r}{\sin^2 r} - \frac{\nu^2}{\sin^2 r} - \lambda \mu \right) f(r) = 0. \quad (16)$$

Аналогично, исключая функцию  $f(r)$ , приходим к уравнениям:

$$f(r) = \frac{1}{\mu} \left( \frac{d}{dr} - \frac{\nu}{\sin r} \right) g(r), \quad \left( \frac{d^2}{dr^2} + \nu \frac{\cos r}{\sin^2 r} - \frac{\nu^2}{\sin^2 r} - \lambda \mu \right) g(r) = 0. \quad (17)$$

Отмечаем симметрию между уравнениями второго порядка: они получаются друг из друга заменой  $\nu \Rightarrow -\nu$ ; фактически это избавляет нас от необходимости рассматривать оба случая, достаточно исследовать один и ответ для второго случая можно получить формальной заменой.

Обращаемся к уравнениям (15) и исключим функцию  $f(t)$ :

$$f(t) = -\frac{1}{\lambda} \left( i \cosh t \frac{d}{dt} + m \cosh t \right) g(t), \\ \left( \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\sinh t}{\cosh t} \frac{d}{dt} + m^2 - im \frac{\sinh t}{\cosh t} - \frac{\lambda \mu}{\cosh^2 t} \right) g(t) = 0. \quad (18)$$

Аналогично можно исключить функцию  $g(t)$ :

$$g(t) = +\frac{1}{\lambda} \left( i \cosh t \frac{d}{dt} - m \cosh t \right) f(t), \\ \left( \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\sinh t}{\cosh t} \frac{d}{dt} + m^2 + im \frac{\sinh t}{\cosh t} - \frac{\lambda \mu}{\cosh^2 t} \right) f(t) = 0. \quad (19)$$

Дальше исследуем уравнение:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \nu \frac{\cos r}{\sin^2 r} - \frac{\nu^2}{\sin^2 r} - \lambda \mu \right) f(r) = 0. \quad (20a)$$

Перейдем к новой переменной  $y = (1 - \cos r)/2$ :

$$y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} + \left( \frac{1}{2} - y \right) \frac{d}{dy} - \left[ \frac{\nu}{4y} - \frac{\nu}{4(1-y)} + \frac{\nu^2}{4} \frac{1}{y} + \frac{\nu^2}{4} \frac{1}{1-y} + \lambda \mu \right] f = 0. \quad (20b)$$

Вводим подстановку  $f = y^A (1-y)^B F$ ; при

$$2A = \nu + 1, -\nu; \quad 2B = -\nu + 1, +\nu \quad (20c)$$

уравнение упрощается

$$y(1-y) F'' + \left[ (2A + \frac{1}{2}) - (2A + 2B + 1)y \right] F' - [(A+B)^2 + \lambda \mu] F = 0$$

и может быть отождествлено с уравнением гипергеометрического типа

$$y(1-y) F'' + [(c - (a+b+1)y) F' - abF] = 0,$$

$$a = A + B - \sqrt{-\lambda \mu}, \quad b = A + B + \sqrt{-\lambda \mu}. \quad (20d)$$

Из физических соображений понятно, что решения по радиальной переменной должны

строиться в полиномах и приводить к дискретности (положительного) параметра

$$\Lambda^2 = -\lambda\mu > 0. \quad (21a)$$

Соответствующие решения строятся таким образом:

$$\begin{aligned} 2A &= +\nu + 1 = j + 3/2, & c &= j + 2, \\ 2B &= +\nu = j + 1/2, & A + B &= j + 1, \\ a &= j + 1 - \Lambda = -n, & n &= 0, 1, 2, \dots & \Lambda &= j + 1 + n, \\ b &= j + 1 + \Lambda = 2(j + 1) + n, \\ f(r) &= C y^{(\nu+1)/2} (1-y)^{\nu/2} F(a, b, c, y). \end{aligned} \quad (21b)$$

Воспользовавшись симметрией между уравнениями для функций  $f(r)$  и  $g(r)$ , построим полиномиальные решения и для функций  $g$ :

$$\begin{aligned} g &= C' y^{A'} (1-y)^{B'} G, & 2A' &= -\nu + 1, \nu, & 2B' &= \nu + 1, -\nu, \\ 2A' &= \nu = j + 1/2, & c' &= j + 1 = c - 1, \\ 2B' &= +\nu + 1 = j + 3/2, & A' + B' &= j + 1, \\ a' &= j + 1 - \Lambda = -n = a, & n &= 0, 1, 2, \dots & \Lambda &= j + 1 + n, \\ b' &= j + 1 + \Lambda = 2(j + 1) + n = b, & g(r) &= C' y^{\nu/2} (1-y)^{(\nu+1)/2} F(a, b, c-1, y). \end{aligned} \quad (21c)$$

Чтобы вычислить относительный множитель между коэффициентами  $C$  и  $C'$ , обратимся к дифференциальному соотношению

$$g(r) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{d}{dr} + \frac{\nu}{\sin r} \right) f(r).$$

С учетом (21b), (21c) оно принимает вид:

$$\begin{aligned} \lambda C' (\sin \frac{r}{2})^\nu (\cos \frac{r}{2})^{\nu+1} F(a, b, c-1, y) &= \\ = \left( \frac{d}{dr} + \frac{\nu}{\sin r} \right) C (\sin \frac{r}{2})^{\nu+1} (\cos \frac{r}{2})^\nu F(a, b, c, y) & \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \lambda \frac{C'}{C} (\sin \frac{r}{2})^\nu (\cos \frac{r}{2})^{\nu+1} F(a, b, c-1, y) &= \\ = (\sin \frac{r}{2})^{\nu+1} (\cos \frac{r}{2})^\nu \frac{d}{dr} F(a, b, c, y) + \frac{\nu+1}{2} (\sin \frac{r}{2})^\nu (\cos \frac{r}{2})^{\nu+1} F(a, b, c, y) - \\ - \frac{\nu}{2} (\sin \frac{r}{2})^{\nu+2} (\cos \frac{r}{2})^{\nu-1} F(a, b, c, y) + \frac{\nu}{2} (\sin \frac{r}{2})^\nu (\cos \frac{r}{2})^{\nu-1} F(a, b, c, y). & \end{aligned}$$

Учтем тождество:

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{2} \sin r \frac{d}{dy} = \sin \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2} \frac{d}{dy} = \frac{\cos(r/2)}{\sin(r/2)} y \frac{d}{dy};$$

предыдущее равенство примет вид:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{C'}{C} (\sin \frac{r}{2})^\nu (\cos \frac{r}{2})^{\nu+1} F(a, b, c-1, y) &= \\ = (\sin \frac{r}{2})^\nu (\cos \frac{r}{2})^{\nu+1} \left[ y \frac{d}{dy} F(a, b, c, y) + \frac{\nu+1}{2} F(a, b, c, y) - \right. \\ \left. - \frac{\nu}{2} \frac{1 - \cos^2(r/2)}{\cos^2(r/2)} F(a, b, c, y) + \frac{\nu}{2} \frac{1}{\cos^2(r/2)} F(a, b, c, y) \right] & \end{aligned}$$

и после элементарного упрощения (с учетом  $\nu + \frac{1}{2} = j + 1 = c - 1$ ) дает:

$$\lambda \frac{C'}{C} F(a, b, c-1, y) = y \frac{d}{dy} F(a, b, c, y) + (c-1) F(a, b, c, y).$$

Воспользовавшись известным соотношением для гипергеометрических функций

$$y \frac{d}{dy} F(a, b, c, y) + (c-1)F(a, b, c, y) = (c-1)F(a, b, c-1, y),$$

приходим к тождеству

$$\lambda \frac{C'}{C} F(a, b, c-1, y) = (c-1)F(a, b, c-1, y) \quad \Rightarrow \quad \lambda C' = (j+1) C. \quad (22)$$

Это линейное соотношение между коэффициентами.

Теперь рассмотрим уравнение (18) по переменной  $t$ :

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\sinh t}{\cosh t} \frac{d}{dt} + m^2 - im \frac{\sinh t}{\cosh t} - \frac{\lambda \mu}{\cosh^2 t} \right) g(t) = 0. \quad (23a)$$

Введем новую переменную  $y = (1 - \tanh t)/2$ :

$$\left[ y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} + \left( \frac{1}{2} - y \right) \frac{d}{dy} - \frac{im(1-2y)}{4y(1-y)} + \frac{m^2}{4y(1-y)} + \Lambda^2 \right] g = 0. \quad (23b)$$

Вводим подстановку  $g = y^A (1-y)^B G$ ; при

$$2A = 1 + im, -im; \quad 2B = 1 - im, im \quad (23c)$$

уравнение упрощается

$$y(1-y)G'' + [(2A + \frac{1}{2}) - (2A + 2B + 1)y]G' - [(A+B)^2 - \Lambda^2]G = 0$$

и может быть отождествлено с уравнением гипергеометрического типа

$$\begin{aligned} &y(1-y)F'' + [(c - (a+b+1)y)F' - abF = 0, \\ &c = 2A + \frac{1}{2}, \quad a = A + B - \Lambda, \quad b = A + B + \Lambda, \\ &g(y) = L y^A (1-y)^B G = Ly^A (1-y)^B F(a, b, c, y). \end{aligned} \quad (23d)$$

Рассмотрим поведение возможных решений при очень больших значениях времени  $t \rightarrow +\infty$ :

$$t \rightarrow +\infty, \quad y = \frac{1 - \tanh t}{2} \rightarrow 0, \quad F(a, b, c, 0) = 1, \quad g \approx Ly^A, \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} &2A = 1 + im, \quad g(t) \approx L \left( \frac{1 - \tanh t}{2} \right)^A = Le^{-2At} = Le^{-t} e^{-int}, \\ &2A = -im, \quad g(t) \approx L \left( \frac{1 - \tanh t}{2} \right)^A = Le^{-2At} = Le^{+int}. \end{aligned} \quad (24b)$$

Для того, чтобы получить правильное описание построенных решений около точки  $t \rightarrow -\infty$  ( $y \rightarrow 1$ ), воспользуемся соотношением Куммера:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} U_2 + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} U_6, \\ U_1 &= F(a, b, c, y), \quad U_2 = F(a, b, a+b+1-c, 1-y), \\ U_6 &= (1-y)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-y). \end{aligned} \quad (25a)$$

При  $y \rightarrow 1$  это соотношение дает:

$$\begin{aligned} F(a, b, c, y) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-y)^{1/2-2B}, \\ c-a-b &= \frac{1}{2} - 2B, \end{aligned} \quad (25b)$$

и для функции  $g(y)$  получаем:

$$g = (1-y)^B \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-y)^{1/2-B}. \quad (25c)$$

Соответственно имеем две возможности:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -\infty, \quad 1-y \rightarrow 0, \quad B = \frac{1}{2} - \frac{im}{2}, \\ g &= (1-y)^{1/2-im/2} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-y)^{+im/2} \end{aligned} \quad (26a)$$

и

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -\infty, \quad 1-y \rightarrow 0, \quad B = +\frac{im}{2}, \\ g &= (1-y)^{im/2} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-y)^{1/2-im/2}. \end{aligned} \quad (26b)$$

При оценке вкладов членов в этих асимптотических разложениях следует учитывать соотношения

$$\begin{aligned} (1-y)^{1/2-im/2} &= e^{(1-im)t} = \left(e^{\ln(1-y)}\right)^{1/2-im/2} = e^{(1/2)\ln(1-y)} e^{-i(m/2)\ln(1-y)} = \\ &= e^{(1/2)\ln(1-y)} [\cos(m/2)\ln(1-y) - i \sin(m/2)\ln(1-y)] \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (27)$$

это осциллирующий фактор, гасящийся стремящимся к нулю множителем;

$$(1-y)^{+im/2} = e^{imt} = \left(e^{\ln(1-y)}\right)^{+im/2} = \cos(m/2)\ln(1-y) - i \sin(m/2)\ln(1-y) \quad (28)$$

это осциллирующая функция.

Воспользовавшись отмеченной выше симметрией между уравнениями, проводя формальную замену  $m \Rightarrow -m$ , находим явный вид (с точностью до множителей) возможных решений для функции  $f(t)$ :

$$\begin{aligned} c' &= 2A' + \frac{1}{2}, \quad a' = A' + B' - \Lambda, \quad b' = A' + B' + \Lambda, \\ f(y) &= L' y^{A'} (1-y)^{B'} G' = L' y^{A'} (1-y)^{B'} F(a', b', c', y), \end{aligned} \quad (29a)$$

где  $A'$ ,  $B'$  могут принимать значения согласно

$$2A' = 1 - im, +im, \quad 2B' = 1 + im, -im. \quad (29b)$$

Рассмотрим поведение возможных решений при очень больших значениях времени  $t \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} t &\rightarrow +\infty, \quad y = \frac{1-\tanh t}{2} \rightarrow 0, \quad F(a', b', c', 0) = 1, \quad f \approx L' y^{A'}, \\ 2A' &= 1 - im, \quad f(t) \approx L' \left( \frac{1-\tanh t}{2} \right)^{A'} = L' e^{-2A't} = L' e^{-t} e^{+imt}, \end{aligned} \quad (30a)$$

$$2A' = +im, \quad f(t) \approx L' \left( \frac{1-\tanh t}{2} \right)^{A'} = L' e^{-2A't} = L' e^{-imt}. \quad (30b)$$

При больших отрицательных значениях временной координаты  $t \rightarrow -\infty$  имеем:

$$f = (1-y)^{B'} \frac{\Gamma(c')\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')} + \frac{\Gamma(c')\Gamma(-c'+a'+b')}{\Gamma(a')\Gamma(b')} (1-y)^{1/2-B'}. \quad (31)$$

Соответственно имеем две возможности:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -\infty, \quad 1-y \rightarrow 0, \quad B' = \frac{1}{2} + \frac{im}{2}, \\ f &= (1-y)^{1/2+im/2} \frac{\Gamma(c')\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')} + \frac{\Gamma(c')\Gamma(-c'+a'+b')}{\Gamma(a')\Gamma(b')} (1-y)^{-im/2} \end{aligned} \quad (32a)$$

и

$$t \rightarrow -\infty, \quad 1-y \rightarrow 0, \quad B' = -\frac{im}{2},$$

$$f = (1-y)^{-im/2} \frac{\Gamma(c')\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')} + \frac{\Gamma(c')\Gamma(-c'+a'+b')}{\Gamma(a')\Gamma(b')} (1-y)^{1/2+im/2}. \quad (32b)$$

При оценке вкладов членов в этих асимптотических разложениях следует учитывать соотношения

$$(1-y)^{1/2+im/2} = e^{(1+im)t} =$$

$$= e^{(1/2)\ln(1-y)} [\cos(-m/2)\ln(1-y) + i\sin(m/2)\ln(1-y)] \rightarrow 0$$

и

$$(1-y)^{-im/2} = e^{imt} =$$

$$= (e^{\ln(1-y)})^{-m/2} = \cos(-m/2)\ln(1-y) + i\sin(m/2)\ln(1-y).$$

Теперь воспользуемся первым уравнением системы и, выбрав явный вид функции  $g(t)$ , вычислим явный вид соответствующей функции  $f(t)$ :

$$f(t) = -\frac{\cosh t}{\lambda} \left( i \frac{d}{dt} + m \right) g(t). \quad (33a)$$

Учтем тождества:

$$\frac{d}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\cosh^2 t} \frac{d}{dy} = -2y(1-y) \frac{d}{dy}, \quad \cosh t = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 t}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}};$$

соотношение (33a) принимает вид:

$$f(t) = -\frac{1}{2\lambda} \frac{L}{\sqrt{y(1-y)}} \left( -2iy(1-y) \frac{d}{dy} + m \right) y^A (1-y)^B F(a, b, c, y).$$

Дальше получаем

$$f(t) = -\frac{1}{2\lambda} \frac{L}{\sqrt{y(1-y)}} \times$$

$$\times \left[ -i \left( 2Ay^A (1-y)^{B+1} F - 2By^{A+1} (1-y)^B F + 2y^{A+1} (1-y)^{B+1} \frac{d}{dy} F \right) + my^A (1-y)^B F \right]. \quad (33b)$$

Выносим общий множитель за скобку

$$f(t) = -\frac{(-i)}{2\lambda} \frac{L}{\sqrt{y(1-y)}} y^A (1-y)^B \left[ 2A(1-y)F - 2ByF + 2y(1-y) \frac{d}{dy} F + imF \right]. \quad (33c)$$

Убедимся, что среди построенных выше решений существуют пары  $f(y), g(y)$ , удовлетворяющие дифференциальному соотношению (33c).

Первая пара:

$$g(y) = Ly^A (1-y)^B F(a, b, c, y),$$

$$A = \frac{1+im}{2}, \quad B = \frac{im}{2}, \quad c = 2A + \frac{1}{2} = im + \frac{3}{2},$$

$$a = A + B - \Lambda = im + \frac{1}{2} - \Lambda, \quad b = A + B + \Lambda = im + \frac{1}{2} + \Lambda; \quad (34)$$

$$f(y) = L'y^A (1-y)^B F(a', b', c', y),$$

$$A' = \frac{im}{2} = A - \frac{1}{2}, \quad B' = \frac{1+im}{2} = B + \frac{1}{2}, \quad c' = 2A' + \frac{1}{2} = im + \frac{1}{2} = c - 1,$$

$$a' = A' + B' - \Lambda = im + \frac{1}{2} - \Lambda = a, \quad b' = A' + B' + \Lambda = im + \frac{1}{2} + \Lambda = b. \quad (35)$$

Уравнение (33c) преобразуется для этой пары функций в следующее (пока учитываем только

выражение для  $g(y)$ :

$$f(t) = -\frac{(-i)}{2\lambda} \frac{L}{\sqrt{y(1-y)}} y^A (1-y)^B \times \\ \times \left[ 2A(1-y)F + 2y(1-y) \frac{d}{dy} F + im(1-y)F \right]; \quad (36a)$$

выносим за скобку множитель  $(1-y)$  и упрощаем

$$f(t) = -\frac{(-i)}{2\lambda} L y^{A-1/2} (1-y)^{B+1/2} \left[ 2AF + 2y \frac{d}{dy} F + imF \right],$$

или

$$f(t) = \frac{i}{\lambda} L y^{A'} (1-y)^{B'} \left[ (c-1)F + y \frac{d}{dy} F \right]. \quad (36b)$$

Левую часть заменим согласно

$$f(y) = L' y^{A'} (1-y)^{B'} F(a', b', c', y) = L' y^{A'} (1-y)^{B'} F(a, b, c-1, y),$$

в результате приходим к соотношению

$$L' F(a, b, c-1, y) = \frac{i}{\lambda} L \left[ (c-1)F(a, b, c, y) + y \frac{d}{dy} F(a, b, c, y) \right]. \quad (36c)$$

Отсюда, воспользовавшись известным соотношением для гипергеометрических функций

$$y \frac{d}{dy} F(a, b, c, y) + (c-1)F(a, b, c, y) = (c-1)F(a, b, c-1, y),$$

приходим к нужному линейному соотношению между коэффициентами  $L, L'$ :

$$L' = \frac{i}{\lambda} L(c-1). \quad (36d)$$

Вторая пара:

$$g(y) = L y^A (1-y)^B F(a, b, c, y), \\ A = -\frac{im}{2} = A' - \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1-im}{2} = B' + \frac{1}{2}, \quad c = 2A + \frac{1}{2} = -im + \frac{1}{2} = c' - 1, \\ a = A + B - \Lambda = -im + \frac{1}{2} - \Lambda = a', \quad b = A + B + \Lambda = -im + \frac{1}{2} + \Lambda = b'; \quad (37a)$$

$$f(y) = L' y^{A'} (1-y)^{B'} F(a', b', c', y), \\ A' = \frac{1-im}{2}, \quad B' = -\frac{im}{2}, \quad c' = 2A' + \frac{1}{2} = -im + \frac{3}{2}, \\ a' = A' + B' - \Lambda = -im + \frac{1}{2} - \Lambda = a, \quad b' = A' + B' + \Lambda = -im + \frac{1}{2} + \Lambda = b. \quad (37b)$$

Будем пользоваться уравнением

$$g(t) = \frac{1}{\mu} \cosh t \left( i \frac{d}{dt} - m \right) f(t); \quad (38a)$$

оно эквивалентно следующему:

$$g(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{L'}{\sqrt{y(1-y)}} \left( -2iy(1-y) \frac{d}{dy} - m \right) y^{A'} (1-y)^{B'} F(a', b', c', y); \quad (38b)$$

соотношение (38b) принимает вид:

$$g(t) = \frac{1}{2\mu} \frac{L'}{\sqrt{y(1-y)}} \left( -2iy(1-y) \frac{d}{dy} - m \right) y^{A'} (1-y)^{B'} F(a', b', c', y).$$

Дальше получаем:

$$g(t) = \frac{1}{2\mu} \frac{L'}{\sqrt{y(1-y)}} \times \\ \times \left[ -i \left( 2A'y^{A'}(1-y)^{B'+1}F - 2B'y^{A+1}(1-y)^{B'}F + 2y^{A+1}(1-y)^{B'+1} \frac{d}{dy}F \right) - my^A(1-y)^{B'}F \right]. \quad (38c)$$

Выносим общий множитель за скобку:

$$g(t) = -\frac{i}{2\mu} \frac{L'}{\sqrt{y(1-y)}} y^{A'}(1-y)^{B'} \times \\ \times \left[ 2A'(1-y)F - 2B'yF + 2y(1-y) \frac{d}{dy}F - imF \right]. \quad (38d)$$

Уравнение (38d) преобразуется для этой пары функций в следующее (пока учитываем только выражение для  $f(y)$ ):

$$g(t) = -\frac{i}{2\mu} \frac{L'}{\sqrt{y(1-y)}} y^{A'}(1-y)^{B'} \times \\ \times \left[ 2A'(1-y)F + 2y(1-y) \frac{d}{dy}F - im(1-y)F \right]; \quad (39a)$$

выносим за скобку множитель  $(1-y)$  и упрощаем

$$g(t) = -\frac{i}{2\mu} L' y^{A'-1/2} (1-y)^{B'+1/2} \left[ 2A'F + 2y \frac{d}{dy}F - imF \right],$$

или

$$g(t) = -\frac{i}{2\mu} L' y^A (1-y)^B \left[ (c'-1)F + y \frac{d}{dy}F \right]. \quad (39b)$$

Левую часть заменим согласно

$$g(y) = Ly^A(1-y)^B F(a, b, c, y) = Ly^A(1-y)^B F(a', b', c' - 1, y),$$

в результате приходим к соотношению

$$LF(a', b', c' - 1, y) = -\frac{i}{2\mu} L' \left[ (c' - 1)F(a', b', c', y) + y \frac{d}{dy}F(a', b', c', y) \right]. \quad (39c)$$

Отсюда, воспользовавшись известным соотношением для гипергеометрических функций

$$y \frac{d}{dy}F(a', b', c', y) + (c' - 1)F(a', b', c', y) = (c' - 1)F(a', b', c' - 1, y),$$

приходим к нужному линейному соотношению между коэффициентами  $L, L'$ :

$$L = -\frac{i}{2\mu} L'(c' - 1). \quad (39d)$$

Таким образом, на основе применения метода разделения переменных построена полная система точных решений общековариантного уравнения Дирака в нестатических координатах пространства де Ситтера и соответствующей нестатической тетраде. При разделении переменных использован формализм  $D$ -функций Вигнера. На решениях диагонализируются квадрат и третья проекция полного момента. Исследованы асимптотические свойства оператора пространственного отражения; вычислены относительные коэффициенты для возможных пар радиальных и временных функций, в терминах которых строятся 4-компонентные решения уравнения Дирака. Уравнения по радиальной переменной приводят к дискретному спектру постоянной разделения.

### Литература

1. Dirac, P.A.M. The electron wave equation in the de Sitter space / P.A.M. Dirac // Ann. Math. – 1935. – Vol. 36. – P. 657–669.
2. Dirac, P.A.M. Wave equations in conformal space / P.A.M. Dirac // Ann. of Math. – 1936. – Vol. 37. – P. 429–442.

3. Goto, K. Wave equations in de Sitter space / K. Goto // Progr. Theor. Phys. – 1951. – Vol. 6. – P. 1013–1014.
4. Nachtmann, O. Quantum theory in de-Sitter space / O. Nachtmann // Commun. Math. Phys. – 1967. – Vol. 6. – P. 1–16.
5. Chernikov, N.A. Quantum theory of scalar field in de Sitter space-time / N.A. Chernikov, E.A. Tagirov // Ann. Inst. Henri Poincaré. – 1968. – Vol. IX. – P. 109–141.
6. Börner, G. Classical and quantum theory in de Sitter space / G. Börner, H.P. Dürr // Nuovo Cim. A. – 1969. – Vol. 64. – P. 669–713.
7. Castagnino, M. Champs spinoriels en Relativité générale; le cas particulier de l'espace-temps de De Sitter et les équations d'ond pour les spins éléves / M. Castagnino // Ann. Inst. Henri Poincaré. A. – 1972. – Vol. 16. – P. 293–341.
8. Tagirov, E.A. Consequences of field quantization in de Sitter type cosmological models / E.A. Tagirov // Ann. Phys. – 1973. – Vol. 76. – P. 561–579.
9. Riordan, F. Solutions of the Dirac equation in finite de Sitter space / F. Riordan // Nuovo Cim. B. – 1974. – Vol. 20. – P. 309–325.
10. Hawking, S.W. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation / S.W Hawking, G.W. Gibbons // Phys. Rev. D. – 1977. – Vol. 15. – P. 2738–2751.
11. Lohiya, D. Massless scalar field in a de Sitter universe and its thermal flux / D. Lohiya, N. Panchapakesan // J. Phys. A. – 1978. – Vol. 11. – P. 1963–1968.
12. Lohiya, D. Particle emission in the de Sitter universe for massless fields with spin / D. Lohiya, N. Panchapakesan // J. Phys. A. – 1979. – Vol. 12. – P. 533–539.
13. Otchik, V.S. On the Hawking radiation of spin 1/2 particles in the de Sitter space-time / V.S. Otchik // Class. Quantum Crav. – 1985. – Vol. 2. – P. 539–543.
14. Motolla, F. Particle creation in de Sitter space / F. Motolla // Phys. Rev. D. – 1985. – Vol. 31. – P. 754–766.
15. Mishima, T. Particle production in de Sitter spacetime / T. Mishima, A. Nakayama // Progr. Theor. Phys. – 1987. – Vol. 77. – P. 218–222.
16. Богуш, А.А. Векторное поле в пространстве де Ситтера / А.А. Богуш, В.С. Отчик, В.М. Редьков // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1986. – № 1. – С. 58–62.
17. Редьков, В.М. О степенях свободы для поля со спином 3/2 в мире де Ситтера и разделении переменных в статических координатах / В.М. Редьков // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1992. – № 5–6. – С. 50–56.
18. Polarski, D. The scalar wave equation on static de Sitter and anti-de Sitter spaces / D. Polarski // Class. Quantum Grav. – 1989. – Vol. 6. – P. 893–900.
19. Bros, J. Quantum Field Theory in the de Sitter Universe / J. Bros, J.P. Gazeau, U. Moschella // Phys. Rev. Lett. – 1994. – Vol. 73. – P. 1746.
20. Suzuki, H. Absorption Probability of De Sitter Horizon for Massless Fields with Spin / H. Suzuki, E. Takasugi // Mod. Phys. Lett. A. – 1996. – Vol. 11. – P. 431.
21. Garidi, T. De Sitter Waves and the Zero Curvature Limit Comments / T. Garidi, E. Huguet, J. Renaud // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol. 67. – Paper 124028.
22. Moradi, S. Discrete Symmetries for Spinor Field in de Sitter Space / S. Moradi, S. Rouhani, M.V. Takook // Phys. Lett. B. – 2005. – Vol. 613. – P. 74–82.
23. Bachelot, A. The Dirac equation on the Anti-de-Sitter Universe. L'équation de Dirac sur l'univers Anti-de Sitter / A. Bachelot // Comptes Rendus Mathematique. – 2007. – Vol. 345, Issue 8. – P. 435–440.
24. Ovsyuk, E.M. Spherical waves of spin 1 particle in anti de Sitter space-time / E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov // Acta Physica Polonica. B. – 2010. – Vol. 41, № 6. – P. 1247–1276.
25. Red'kov, V.M. On exact solutions for quantum particles with spin  $S = 0, 1/2, 1$  and de Sitter event horizon / V.M. Red'kov, E.M. Ovsyuk // Ricerche di matematica. – 2011. – Vol. 60, № 1. – P. 57–88.
26. Red'kov, V.M. Hawking radiation in de Sitter space, to calculation of reflection coefficient for quantum particles / V.M. Red'kov, E.M. Ovsyuk, G.G. Krylov // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. – 2012. – № 4. – С. 153–169.
27. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 486 с.
28. Ландау, Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
29. Берестецкий, В.Б. Квантовая электродинамика / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1980. – 804 с.
30. Варшалович, Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Л.: Наука, 1975. – 438 с.
31. Редьков, В.М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2011. – 328 с.
32. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 294 с.
33. Кратцер, Ф. Трансцендентные функции / Ф. Кратцер, М. Франц. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 467 с.

**Е. В. Прокопович, С. В. Капора, В. С. Савенко**

## **ЭЛЕКТРОННЫЕ МЕХАНИЗМЫ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛОВ. РАСЧЕТ СОБСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКА ОБРАЗЦА**

При пропускании импульса электрического тока через кристалл во время деформации импульс тока может вызвать вторичные эффекты, пинч- и скин-эффекты, а также термическое разупрочнение решетки.

Скин-эффект обусловлен возникновением вихревых токов при прохождении электромагнитной волны (импульса тока) в кристалле, и часть энергии импульса при этом преобразуется в теплоту. В результате скин-эффекта происходит уменьшение напряженности электрического и магнитного полей, плотности тока по мере их проникновения в кристалл.

Пинч-эффект возникает при взаимодействии собственного магнитного поля с образцом. Данный эффект вызывает вибрацию кристаллической решетки, т. е. он действует подобно ультразвуку, стимулируя пластическую деформацию металла через решеточную подсистему металла. В электронно-дырочной плазме твердого тела существуют два типа пинч-эффектов. Z-пинч возникает при протекании сильного тока по образцу и обусловлен сжатием плазмы собственным магнитным полем тока. Θ-пинч соответствует сжатию плазмы в импульсном продольном магнитном поле, нарастающем во времени. Пространственное перераспределение плазмы твердого тела при пинч-эффекте происходит в результате амбиполярного дрейфа носителей тока к оси образца. При Z-пинче этот дрейф возникает в продольном электрическом поле и поперечном ему собственном магнитном поле тока, а при Θ-пинче – в продольном магнитном поле и индуцируемом им азимутальном электрическом поле. На поверхности образца собственное магнитное поле  $H_m$  тока максимально.

Можно оценить вклад этих факторов в явление электропластичности при двойникованиях кристаллов сурьмы.

На проводник с током формы прямоугольного параллелепипеда под влиянием собственного магнитного поля действует сила, записываемая в виде:

$$F_x = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial(B_z^2)}{\partial x} = -\frac{\partial\sigma_x}{\partial x},$$

где  $\sigma_x$  – механическое напряжение в металле.

Основное уравнение гидромагнетизма применительно к рассматриваемому случаю, являющееся обобщением закона Ома, имеет вид:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \nabla(\rho\nabla B + \nabla V B).$$

Первый член этого выражения отражает диффузию магнитного поля через проводник с удельным сопротивлением  $\rho$ , а второй – изменение магнитного поля, вызванное движением проводника с относительной скоростью  $V$ . На поверхности образца собственное магнитное поле тока принимает максимальное значение  $H_m$ , рассчитываемое по формуле:

$$H_m = 0,2 \frac{I_a}{r},$$

где  $I_a$  – амплитудное значение силы тока в проводнике.

На примере образца Sb (сурьмы) при плотности тока  $j = 1,5 \times 10^3 \text{ А/мм}^2$  и радиусе сечения проводника  $r = 2 \text{ мм}$  рассчитаем собственное магнитное поле тока, возникающее на поверхности проводника из Sb:

$$I_a = jS,$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения проводника.

$S = a \times b$ , отсюда следует, что  $I_a = j(ab)$ , тогда

$$H_m = 0,2 \frac{j(ab)}{r} = 0,2 \frac{1,5 \times 10^3 \times 20}{2} = 3 \times 10^3 \text{ (э).}$$

При  $r = 5 \text{ мм}$  максимальном значении  $H_m$  принимает значение

$$H_m = 0,2 \frac{j(ab)}{2} = 0,2 \frac{1,5 \times 10^3 \times 75}{5} = 4,5 \times 10^3 \text{ (Э).}$$

Таким образом, мы можем сделать вывод, что, чем больше радиус образца, тем соответственно больше пинч-эффект.

Рассмотрим механическое давление на поверхности образца. Оно составляет:

$$P = \mu \frac{H_m^2}{8\pi},$$

где  $P$  – механическое давление (Па),

$\mu$  – магнитная постоянная, равная  $1,257 \times 10^{-6}$  Н/А<sup>2</sup>,

При  $H_m = 3 \times 10^3$  (Э) получаем:

$$P = \mu \frac{H_m^2}{8\pi} = 1,257 \times 10^{-6} \frac{(3 \times 10^3)^2}{8 \times 3,14} = 0,45 \text{ (Па).}$$

При  $H_m = 4,5 \times 10^3$  (Э) получаем:

$$P = \mu \frac{H_m^2}{8\pi} = 1,257 \times 10^{-6} \frac{(4,5 \times 10^3)^2}{8 \times 3,14} = 1,013 \text{ (Па).}$$

Из последнего выражения следует, что при одной и той же плотности тока, например, как в нашем  $j = 1,5 \times 10^3$  А/мм<sup>2</sup>, пинч-эффект будет выражен тем больше, чем больше радиус использованного образца.

Таким образом, пинч-эффект является масштабным эффектом. Он квадратично зависит от  $r$  (а также от  $j$ ). Для образцов малого радиуса он не должен наблюдаться.

В образцах, диаметром более 1 мм, могут наблюдаться эффекты нагревания за счет выделения джоулем тепла.

Рассмотрим силу, зависящую от пинч-эффекта. Максимальная осевая сила  $F_z$  от пинч-эффекта равна:

$$F_z = 2\nu PS,$$

где  $F_z$  – максимальная осевая сила,

$\nu$  – коэффициент Пуассона равный 0,27,

$P$  – механическое давление,

$S$  – площадь сечения образца,

Тогда для образца с  $r = 2$  мм и  $P = 0,45$  Па

$$F_z = 2\nu PS = 2 \times 0,27 \times 0,45 \times 20 = 4,86 \text{ (Н),}$$

для образца с  $r = 5$  мм и  $P = 1,013$  Па

$$F_z = 2\nu PS = 2 \times 0,27 \times 0,45 \times 75 = 18,225 \text{ (Н).}$$

Пинч-эффект тем больше, чем больше осевая сила образца.

Материал образца также играет особую роль: чем меньше проводимость металла, тем больше скорость диффузии магнитного поля в образце, и соответственно пинч меньше.

Также величина пинч-эффекта зависит от круговой частоты:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

$\omega$  – круговая частота (Гц),

$L$  – индуктивность, равная  $10^{-7}$  (Гн),

$C$  – ёмкость, равная  $10^{-3}$  (Ф).

Получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 10^5 \text{ (Гц)}$$

Чем больше частота  $\omega$ , тем более ярко выражен пинч-эффект. Поскольку необходимость иметь высокие значения тока разряда обязывают использовать конденсаторы большей ёмкости  $C$ , единственным путём увеличения частоты  $\omega$  является уменьшение индуктивности цепи  $L$  образец – подводящие провода – источник тока.

Добротность контура  $Q$ , определяемая выражением:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

где  $Q$  – добротность контура (дБ),

$R$  – полное активное сопротивление цепи (Ом).

Добротность контура должна быть небольшой, например, при  $R \leq 0,1$  Ом,  $L \cong 10^{-7}$  Гн и  $C \cong 10^{-3}$  Ф составлять величину  $Q \leq 0,1$ .

Длительность импульсов желательно иметь минимальную:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 6,28 \times \sqrt{10^{-7} \times 10^{-3}} = 0,6 \times 10^{-4} (\text{с}).$$

Толщина скин-слоя для образца определяется формулой:

$$\Delta = c \sqrt{\frac{\rho}{2\pi\omega}} = 0,044 (\text{мм}),$$

где  $\Delta$  – толщина скин-слоя,

$c$  – электродинамическая постоянная, равная  $3 \times 10^{10}$  см/с,

$\rho$  – удельное электросопротивление среды, для сурьмы равно  $43,045 \times 10^6$  Ом × см.

Для достижения максимума пинч-эффекта необходимо выбирать такую частоту импульсов тока, при которой магнитное поле не успевает существенно проникать через поверхность образца. Можно считать, что в процессе деформации кристаллов за счет пинч-эффекта магнитное поле диффундирует в кристалл, причем скорость диффузии зависит от проводимости металла и от частоты тока.

При одной и той же геометрии образцов пинч-эффект выражен сильнее на материале, обладающем высокой электропроводностью.

Таким образом, импульсный ток оказывает на деформируемый металл, помимо собственно электронно-пластического действия, пондеромоторное действие, обусловленное сжатием образцов собственным магнитным полем и возбуждением в них упругих колебаний с частотой следования импульсного тока.

#### Литература

1. Физические основы электроимпульсной и электропластической обработок и новые материалы / Ю.И. Баранов, О.А. Троицкий, Ю.С. Авраамов, А.Д. Шляпин – М.: МГИУ, 2001 – 844 с.
2. Троицкий, О.А. Фундаментальные и прикладные исследования электропластической деформации металлов / О.А. Троицкий, В.С. Савенко. – Минск: ИВЦ Минфина, 2013. – 375 с.
3. Савенко, В.С. Механическое двойкование и электропластичность металлов в условиях внешних энергетических воздействий / В.С. Савенко. – Минск: БГАФК, 2003. – 203с.

### Ж. И. Равуцкая

## ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ ФИЗИКИ НА ОСНОВЕ ИДЕЙ ЛИЧНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПОДХОДА

В современной общеобразовательной школе все в большей степени реализуются идеи личностно-ориентированной педагогической парадигмы. В качестве одного из основных концептуальных положений личностно-ориентированного образования в научно-педагогической литературе выделяется диагностика личностного развития учащихся, что предполагает необходимость создания каждым учителем системы диагностики качества обучения. Такая система наиболее эффективна в рамках педагогического мониторинга. В связи с этим возникает необходимость в организации подготовки будущего учителя к деятельности по проведению мониторинга качества обучения в общеобразовательной школе.

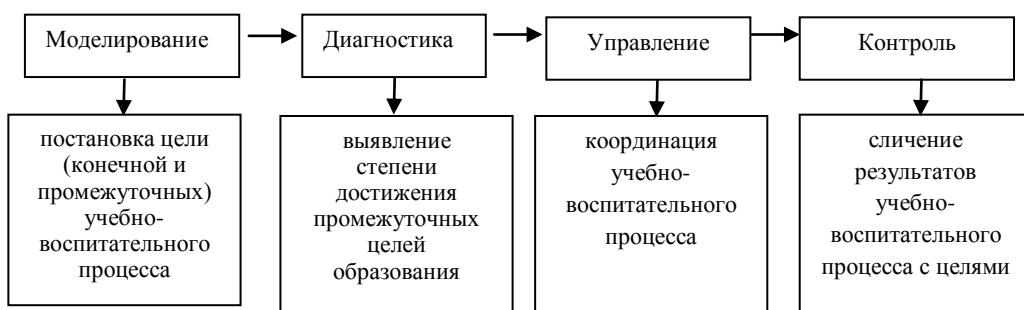
Образовательный мониторинг представляет собой систему организации сбора, хранения, обработки и распространения информации о функционировании педагогической системы.

Педагогическая система представляет собой определенную совокупность взаимосвязанных средств, методов и процессов, необходимых для создания организованного, целенаправленного и преднамеренного педагогического влияния на формирование личности учащихся с заданными качествами. В рамках мониторинга проводится выявление и оценивание проведенных педагогических действий.

В педагогике мониторинг часто определяют как постоянное наблюдение за педагогическим процессом с целью выявления его соответствия желаемому результату.

Мониторинг сходен и с информационной стадией управления. Отличительной чертой мониторинга является информация о соответствии фактического результата его ожиданиям, предсказаниям, а также оценка этого соответствия [1].

Схему мониторинга можно представить в следующем виде (рисунок 1).



Исследования последних лет в сфере управления образовательными учреждениями свидетельствуют о том, что эффективность учебного процесса может быть достигнута при условии четкого определения задач и единства (целостности) программ их проведения, выделения учащимся максимума времени для решения конкретных задач и осуществления системного педагогического управления.

При этом в рамках мониторинга обеспечивается обратная связь, осведомляющая о соответствии фактических результатов деятельности педагогической системы планируемым результатам.

Закономерной является связь мониторинга с целями обучения, которые обычно фиксируются в планах и являются исходной основой мониторинга, т. е. мониторинг связан с оценкой реализации целей и планов. В формулировках целей и задач можно выделить следующие моменты: каким образом воздействовать и какие условия обеспечивать для учащихся (характеристика создаваемых образовательных условий); какие особенности и возможности следует формировать у учащихся (характеристика внутренних особенностей и возможностей учащихся); каких результатов способны будут достичь учащиеся в образовательном процессе (характеристика образовательного процесса).

В педагогической литературе выделены требования, предъявляемые к целям обучения, – *полнота, диагностичность, инструментальность*.

Требование *полноты* предполагает, чтобы в описании целей были указаны все изменения, которые должны быть внесены в процесс формирования личности учащегося в данном дидактическом цикле.

*Диагностичность* подразумевает настолько точную и определенную постановку целей, чтобы можно было однозначно сделать заключение о степени их реализации и построить вполне определенный дидактический процесс, гарантирующий их достижение за заданное время.

Требование *инструментальности* характеризует наличие адекватного инструмента для выявления и оценки результата в процессе объективного контроля.

Процесс целеобразования является существенной чертой педагогической технологии. Важнейшим критерием технологического подхода является диагностичное описание целей обучения, представление их через действия учащихся, выраженные в глагольной форме, по которым можно определить (и, соответственно, задать) уровень усвоения. Технология исходит из того, что цель обучения – изменение состояния ученика: его знаний, мыслей, чувств, поведения. Поэтому общие цели обучения при разработке обучающей системы по предмету подлежат конкретизации. Основой такой конкретизации служит известная таксономия целей Б. Блума [2]. В таблице 1 показаны категории целей и соответствующие им действия ученика, которые можно диагностировать – измерить. Каждая новая категория означает более высокий уровень усвоения.

Таблица 1 – Диагностичное формулирование целей обучения

Категории целей	Обобщенные формулировки целей
Знание: запоминание и воспроизведение материала – от фактов до теории	Знать значение терминов, конкретные факты, методы, правила, принципы
Понимание: умение преобразовать, интерпретировать материал, предложить следствия, предсказать результаты действия	Объяснить факты, связи между явлениями, преобразовать материал (из словесной формы в математическую), описать следствия, вытекающие из данных
Применение: умение использовать материал в стандартных и новых ситуациях	Использовать понятия, принципы, правила в конкретных ситуациях, демонстрировать правильное применение метода
Анализ: умение выделять части из целого, взаимосвязи, принципы организации целого	Выделить скрытые предположения, существенные признаки, логику рассуждения, видеть сходство и различие явлений
Синтез: умение комбинировать элементы, чтобы получить целое, обладающее новизной	Описать, составить план эксперимента, решить проблему с опорой на знания из разных областей

По характеру формулировок конкретизированных целей можно сделать вывод об их непосредственном использовании как основы для подготовки контрольных (тестовых) заданий.

Диагностичное задание цели предполагает построение дидактического процесса, гарантирующего достижение этой цели за заданное время. Таким образом, цель задана диагностично если: дано настолько точное и определенное описание формируемого личностного качества, что его можно безошибочно отифференцировать от любых других качеств личности; имеется способ, «инструмент» для однозначного выявления диагностируемого качества личности в процессе объективного контроля его сформированности; возможно измерение интенсивности диагностируемого качества на основе данных контроля; существует шкала оценки качества, опирающаяся на результаты измерения.

Для формирования у студентов умений диагностично формулировать цели обучения применяется следующая процедура: выделяются учебные элементы занятия (понятия, действия и т. п., которые будут осваиваться на уроке);

- под каждый из элементов определяются в соответствии с учебной программой те действия, которыми учащиеся должны овладеть. Эти действия строятся по уровням (от воспроизведения до творческого) в зависимости от этапа изучения тех или иных учебных элементов и зоны ближайшего развития учащихся;
- составляются или подбираются разноуровневые вопросы и задания по каждому из выделенных действий; создаются эталоны правильных ответов и решений; готовится инструкция для учащихся;
- вопросы и задачи объединяются в тестовое задание.

Процесс и результат данной работы может быть представлен с помощью таблицы, содержащей требования к изучению темы на уровне учебных элементов и целей.

В качестве примера приведем требования к изучению темы «Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца», изучаемой в курсе физики 8 класса [3].

Таблица 2 – Требования к изучению темы «Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца» на уровне учебных элементов и целей

Учебные элементы занятия (УЭ)	Цели изучения УЭ учащимися	Задания для самоконтроля, контроля и коррекции УЭ
1. Работа тока	Дать характеристику работы как физической величины Вывести формулу работы и единицы ее измерения	Какое превращение энергии происходит при работе электрического тока, если: а) горит лампа накаливания; б) вращается электродвигатель; в) заряжается аккумулятор; г) работает электросварочный аппарат?
2. Мощность тока	Дать характеристику мощности как физической величины Вывести формулу и единицы измерения мощности	Составьте тексты из фраз А, Б, Г: А. 1. Работа тока характеризуется ... 2. Мощность тока характеризуется ... Б. 1. Силой тока, напряжением и временем протекания тока.

Учебные элементы занятия (УЭ)	Цели изучения УЭ учащимися	Задания для самоконтроля, контроля и коррекции УЭ
		<p>2. Скоростью совершения работы.  <i>B.</i> Мощность численно равна ...</p> <p>1. произведению силы тока на напряжение и время прохождения тока, ...</p> <p>2. работе, совершенной за 1с, ...</p> <p><i>G.</i> 1. <math>A = IUt</math>, 2. <math>P = \frac{A}{t}</math>.</p>
2. Закон Джоуля-Ленца	Вывести закон Джоуля-Ленца Привести различные варианты формулы закона	<p>Почему при длительном прохождении тока по проводнику его температура перестает расти?  Куда и как передается теплота, выделенная током в проводнике?  Как изменится количество теплоты, выделяемое электрической плиткой, при укорочении ее спирали?</p>
4. Короткое замыкание	Дать понятие короткого замыкания	<p>Почему при включении в квартире слишком много го числа потребителей тока перегорает предохранитель?  С какой целью при проверке осветительного шнура в квартире монтер, обнаружив оголившийся участок провода, обматывает его изоляционной лентой?</p>

С помощью созданного таким образом теста в дальнейшем осуществляется текущий пооперационный контроль и диагностируется степень овладения учащимися действиями, или, иначе, степень достижения цели учебного занятия, а также организуется коррекционная работа.

Обучение студентов диагностичному целеполаганию в значительной степени способствует повышению качества профессиональной подготовки будущего учителя физики.

#### Литература

- Шишов, С.Е. Школа: мониторинг качества образования / С.Е. Шишов, В.А. Кальней.– М.: Педагогическое общество России, 2000. – 320 с.
- Педагогика / под ред. П.И. Пидкастого. – М.: Владос, 1995. – 637 с.
- Физика. Астрономия. 6–11 кл.: примерное календарно-тематическое планирование: пособие для учителей учреждений общ. сред. образования / И.В. Галузо [и др.]. – Минск: НИО: Аверсэв, 2013. – 62 с.

#### В. С. Савенко

### ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ И РЕЗОНАНСНОЕ СПИНОВОЕ РАЗУПРОЧНЕНИЕ В МЕТАЛЛАХ

По оценкам ряда авторов, воздействие электромагнитными полями на деформируемое твердое тело, в частности, на металл во время обработки его давлением или резанием следует относить к высокоэнергетическим воздействиям. Однако эти воздействия, как правило, отличаются относительно низкими затратами энергии – не более  $10^4$  эВ в расчете на один атом, что на один-два порядка меньше затрат энергии на простое механическое деформирование  $10^3$ – $10^2$  эВ или на тепловое действие  $10^{-2}$  эВ. Поэтому указанные факторы целесообразно относить большей частью к стимулирующим воздействиям на твердое тело во время деформации, а основным воздействием считать механическую обработку и деформацию образцов под воздействием внешних механических сил, примером чего являются все способы обработки металлов давлением (ОМД). Действительно, по оценкам [1,2]:

а) в магнитном поле (МП) величиной  $B = 1$  Тл приращение энергии на один атом составляет

$$\Delta W = \mu_b B = 10^{-4} \text{ А/мм}^2;$$

б) в электрическом поле (ЭП) величиной  $E = 1$  кВ/см,

$$\Delta W = eEa = 10^{-4} \text{ эВ};$$

в) в поле импульсного тока  $J_m = 10^3 \text{ А/мм}^2$  длительностью  $t = 100 \text{ мкс}$ ,

$$\Delta W = J_m^2 \rho t a^3 = 10^{-4} \text{ эВ};$$

г) при тепловом действии  $\Delta T = 100^\circ\text{K}$ ,

$$\Delta W = kT = 10^{-4} \text{ эВ};$$

д) при силовой механической деформации  $\varepsilon = 1\%$ ,

$$\Delta W = C \varepsilon a^2 / 2 = 10^{-3} - 10^{-2} \text{ эВ}.$$

В приведенных выражениях  $\mu_b$  – магнетон Бора;  $e$  – элементарный заряд;  $\rho$  – удельное сопротивление;  $k$  – постоянная Больцмана и  $C$  – модуль Юнга.

Исключением являются магнитно-импульсная металлов (МИДМ) и действие мощными импульсами тока во время электропластической деформации металла (ЭПДМ), когда индукция магнитного поля в по условиям эксперимента или технологического воздействия достигает величин в несколько десятков Тл [2]. Указанные явления протекают с участием пинч-эффекта – пондеромоторного действия собственного магнитного поля тока. Во всех трех случаях может происходить глубокая пластическая деформация и разрушение металла без участия внешних механических сил.

К настоящему времени выявлен ряд механизмов действия электромагнитных полей (ЭМП) на деформацию твердых тел, установлено существование более десятка различных электрических, магнитных и электронных явлений, актуальных для тех или иных твердых тел. Существенным в этом ряду оказался электропластический эффект (ЭПЭ) действия импульсного тока [6], который как кооперативное явление вобрал в себе, не менее 6 физических явлений. [4,5]

Однако, по нашему мнению ЭПЭ включает в себя не шесть, а три явления, что доказано экспериментально: 1) действие «электронного ветра»; 2) пинч-эффект; 3) спиновое разупрочнение металла [3,11,14].

Последнее имеет право на существование, поскольку может объяснить увеличение ЭПЭ в присутствии небольшого количества парамагнитных примесей (до 1%), отмеченное в работах [1,6] и в работах американских ученых [8,9]. В результате спиновой конверсии происходит депиннинг дислокаций от точек закрепления в виде примесей, что усиливает ЭПЭ. Наиболее интересным представляется третий канал реализации ЭПЭ, как менее всего изученный и вместе с тем перспективный с точки зрения интенсификации технологических процессов ОМД с использованием ЭПЭ и РСРМ.

Однородное магнитное поле (МП) действует на заряженные движущиеся дислокации с силой Лоренца и может ускорять их перемещение. Подобное действие постоянного МП, а также электростатического поля (ЭСП) возможно также в полупроводниковых кристаллах типа  $A_2B_6$  или  $A_3B_5$  в отношении высокозаряженных дислокаций. Однако, по данным [4], эффекты увлечения дислокаций со стороны МП и ЭСП и полярность действия указанных полей практически отсутствуют. Отмечалась лишь полярность действия тока на перемещения дислокаций в металлических кристаллах, т.е. величины ЭПЭ в металлах [10,11].

Новые представления о действии МП на тонкие электрон-спиновые превращения в твердом теле исходят не из представлений о наличии прямого действия МП на структурные и дислокационные превращения, МП не может повлиять на преодоление дислокациями стопоров в силу малости энергии активации этого процесса со стороны МП  $\mu_b g B$  даже при индукции  $B=1$  Тл. Она, как указывалось, меньше, чем  $kT$  и  $U_a$ .

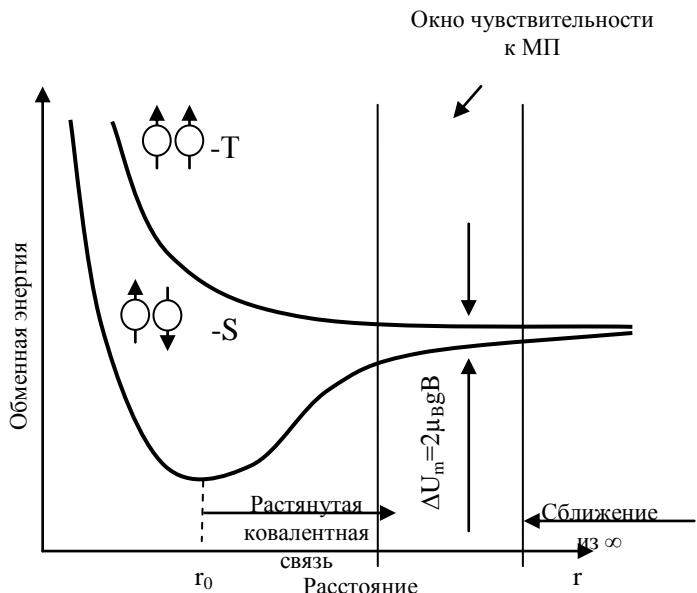
Новые представления исходят из того, что МП может оказывать эффективное влияние на спиновые степени свободы, помимо влияния на орбитальные магнитные моменты [12,13]. Действие МП проявляется, в частности, в изменениях интенсивности фотоэлектрических и люминесцентных процессов, флюоресценции, фото- и темнового тока в органических полупроводниках, находящихся в скрещенных постоянном МП и микроволновом МП и удовлетворяющих условиям электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) для частиц со спином  $s=+1/2$  и фактором спектроскопического расщепления  $g=2$ .

Постановка опытов с изучением влияния МП на движение дислокаций и механические свойства твердых тел через спиновой обменный механизм в отдельных элементах своего экспериментального исполнения напоминает классическую методику радиоспектроскопии ЭПР. Это, в частности, соединение резонатора с деформируемым образцом. Однако в отличие от методики ЭПР в этом случае откликом исследуемой системы на достижение резонанса является увеличение поглощенной энергии микроволновой энергии резонатора с образцом, симбатно с изменением параметров движения дислокаций (стартовых напряжений, длин пробега дислокаций и т.д.), предела текучести образцов, сопротивление их деформированию в

виде текущих значений  $\sigma$ , показаний микротвердости и т.д. То обстоятельство, что ЭПР проявляет исключительно высокую чувствительность к наличию в системе резонатор – образец парамагнитных примесей (в отдельных случаях реакция на уровне нескольких парамагнитных частиц), позволяет ожидать от ЭПР (с применением аппаратуры повышенной мощности) эффективного выполнения им новой функции, а именно как метода частотного селективного энергетического воздействия на деформируемое твердое тело, включая интенсификацию технологических процессов ОМД за счет использования ЭПЭ и СРМ, с целью управления происходящими в нем процессами на спиновом электронном и атомном уровне.

При экспериментальном исполнении оснастки требуется повысить мощность скрещенных МП – постоянного и микроволнового. В неметаллических материалах существование электрон-спинового механизма управления дислокационными процессами в твердом теле уже доказано [4,5]. Этот механизм устраняет кажущееся противоречие между малостью вводимой энергии МП и масштабами возникающих эффектов. На металлах сделано еще мало работ в этой области, но ранее полученные экспериментальные результаты, касающиеся, в частности, большой величины ЭПЭ в металлах с парамагнитными примесями [1, 6–8], в ферромагнитных металлах [3], а также наша работа [15], посвященная исследованиям усиления ЭПЭ в скрещенных ЭМП, могут быть доказательством наличия РСРМ.

Для реализации влияния МП на спиновые степени свободы (ССС) в методиках механических испытаний или при ОМД требуется соблюдение следующих условий по постановке эксперимента: деформируемый металл должен быть соединен с резонатором; мощности постоянного и микроволнового МП должны быть повышенными; МП должны быть скрещены, при этом должны присутствовать ЭМП; наличие в образцах термодинамически неравновесных процессов, в частности, генерация свежих дислокаций, что обеспечивается активной деформацией образцов или давлением в постоянном режиме во время измерений в резонаторе; должен быть обеспечен термодинамический выигрыш между начальным и конечным состоянием системы, что может достигаться, в частности, при механических испытаниях образцов в режиме релаксации напряжений; время распада  $\tau_r$  реакционной пары дислокация – парамагнитная примесь из триплетного Т-состояния должно быть меньше времени  $\tau_{T-S}$  обратного перехода в синглетное S – состояние, т.е.  $\tau_r < \tau_{T-S}$ , чтобы ситуация не вернулась к исходному состоянию, и эффект действия МП не свелся бы к нулю; в случае установления влияния  $B_0$  МП Земли на процессы СК при депиннинге дислокаций, в установках промышленного назначения не потребуется применять установку постоянных магнитов, создающих  $B_0$ . Их заменит магнитное поле Земли. Остается только установить источник, создающий СВЧ-поле, поперечно ориентированное по отношению к магнитному полю Земли.



**Рисунок 1 - Схема спиновой конверсии во внешнем магнитном поле**

Реализация механизма влияния МП на спиновые степени свободы внутри деформируемого твердого тела, включая металл, протекает путем спиновой конверсии (СК), схематически показанной на рисунке 1.

Изначально существуют синглетное S-состояние с  $S_i=0$  и триплетное T-состояние с  $T_i=1$  реакционных пар (РП) дислокация – парамагнитная примесь (РП) в реакционной ячейке со спинами  $S=+/-1/2$ . Разница в величине обменной энергии  $U_T$  и  $U_S$ , т.е.  $(U_T-U_S)$  на расстояниях  $r_0$  порядка межатомного для ковалентной связи составляет примерно 1 эВ. Под влиянием МП,

величиной  $B=1$  Тл, состояние РП не может изменяться, поскольку структурному элементу в твердом теле передается энергия не более  $\mu_b g B = 10^4$  эВ. Здесь  $g$ -фактор, который может иметь значение до 2 и более при развитых процессах СК, и  $B$  – магнитная индукция. На больших расстояниях  $r > r_0$  разница в величине обменных энергий исчезает и МП уже не может оказать существенное влияние на структурные перестройки в твердом теле. Однако, как было установлено в целом цикле исследований, МП способно осуществлять СК на промежуточных расстояниях  $r_0 < r < 2r_0$ , показанном на схеме рисунка 1 как окно чувствительности к влиянию МП, при котором разница в величине обменной энергии (UT-US) соответствует удвоенному значению энергии  $\Delta U$ , передаваемой структурному элементу со стороны МП, т.е. выполняется соотношение:

$$\Delta U_m = 2\mu_b g B = (UT - US).$$

В этом положении РП может оказаться, согласно [3-5], при возбуждении под действием не только тепловых флуктуаций и ионизирующего излучения, но и механических деформаций внутрикристаллических связей, т.е. во время пластической деформации твердого тела. Для срабатывания механизма СК время жизни магнито чувствительного состояния  $\tau^*$  в этом промежуточном состоянии РП должно быть больше времени СК  $\tau_{s-t}$  в магнитном поле, т.е. должно выполняться  $\tau^* > \tau_{s-t}$  чтобы успевала происходить СК. Вместе с тем  $\tau^*$  должно быть меньше времени  $\tau_{s-L}$  спин-решеточной релаксации, чтобы созданное МП изменение заселенности спиновых состояний не успевало термализоваться.

Таким образом, помимо существования окна чувствительности к МП, существуют еще «временные ворота», в которые должно помещаться короткоживущее магниточувствительное состояние РП, а именно должно выполняться условие:

$$\tau_{s-t} < \tau^* < \tau_{s-L}$$

При выполнении этого условия может реализоваться механизм СК. При этом увеличение индукции  $B$  будет расширять ворота снизу (ускоряя СК в РП), а понижение температуры будет расширять ворота сверху. Должно выполняться также указанное нами шестое условие срабатывания механизма влияния МП на ССС и СК. Побуждающим механизмом СК в МП при  $B$ , например, равном 1 Тл, является наличие разницы в величине  $g$ -фактора внутри РП порядка  $10^{-4}$ - $10^{-3}$ . Эта ситуация, получившая название  $\Delta g$ -механизма, состоит в том, что угловые скорости прецессий спинов РП в МП отличаются друг от друга. В целом спины РП имеют частоту прецессий, определяемых по формуле:

$$f = \frac{\mu_b \Delta g B}{h}.$$

Она имеет величину порядка  $10^8$ - $10^9$  с<sup>-1</sup>. При этом происходят переходы из S-состояния в T-состояние и наоборот.

Существенно отметить, что для непрерывности действия механизма СК и ее необратимости, а также для того, чтобы ССС не входили в область насыщения, необходимо обеспечивать быстрое удаление вновь нарабатываемых продуктов (свежепроизведенных дислокаций с обеспеченными условиями для их депиннинга) из реакционной ячейки, т.е. из деформируемой области металла. Это может быть обеспечено в ходе медленной, но активной деформации образцов с постоянной скоростью либо в самые начальные моменты (в первые секунды) релаксации напряжений после выключения возможно активной и быстрой деформации образцов. На дне релаксационных кривых по истечению 2-3 мин после остановки испытательной машины эффект уже не будет, поскольку исчезнут поля внутренних напряжений, побуждающие дислокации к движению, и истощится дислокационный потенциал.

В работе [20] был описан запатентованный авторами способ повышения пластичности проводящего материала за счет наложения на зону деформации скрещенных электромагнитных полей. При этом реализуется интенсификация механизма электропластического эффекта за счет эффекта Холла. Общий принцип способа, который можно применять при любом виде обработки металлов давлением с участием тока, заключается в том, что к деформируемому образцу во взаимно перпендикулярных направлениях прикладываются постоянные электрическое и магнитное поля [15-19]. При этом под влиянием эффекта Холла происходит смещение электронной плотности образца в зоне деформации, что усиливает электропластический эффект. Сопутствующим эффектом является появление заряда при поляризации образца за счет эффекта Холла.

При наложении на зону электропластической деформации металла скрещенных электромагнитных полей в соответствии с принципом суперпозиции полей может усилиться также пинч-действие импульсного тока.

#### Литература

1. Троицкий, О.А. Физические основы и технологии обработки современных металлов: в 2 т. / О.А.Троицкий [и др.]. – Ижевск – Москва: Изд-во РХД., Т 1. – 590 с., Т 2. – 467 с.
2. Троицкий, О.А. Фундаментальные и прикладные исследования электропластической деформации металлов / О.А. Троицкий, В.С. Савенко. – Минск: ИВЦ Минфина, 2013. – 375 с. – ISBN 978-985-7060-11-5.
3. Molotskii, M. Dislocation paths in a magnetic field / M. Molotskii, V. Fleurov // J. Phys. Chem. – 2000. – VB.104. – № 16. – P. 3812–3816.
4. Структура и свойства перспективных металлических материалов / А.Я. Багаутдинов [и др.]. – Томск: Изд-во НТЛ, 2007. – 575 с.
5. Электротермическая резка листового металла электромагнитным полем / В.М. Финкель [и др.] // Физика и химия обработки материалов. – 1985. – №1 . – С. 13–19.
6. Троицкий, О.А. Электромеханический эффект / О.А. Троицкий // Письма в ЖЭТФ. – 1969. – Т. 10. – С. 18–22.
7. Conrad, H. On the mechanisms for electroplastic effect in metals / H. Conrad, A.F. Sprecher, S.L. Mannan // Acta Metal. – 1986. – V. 34. – № 17. – P. 1145–1162.
8. Conrad, H. The electroplastic effect in metals / H. Conrad, A.F. Sprecher // Dislocation in solids. Elsevier. Science. Publishers. – 1989. – V 8. – P. 499–541.
9. Molotskii, M. Spin effectsin plasticity / M. Molotskii // Phys. Rev. Lett. Magazine. – 2003. – V.83. – №12. – P. 1421–1423.
10. Подвижность дислокаций в монокристаллах цинка под действием импульсного тока / Л.В. Зуев [и др.] // ДАН СССР. – 1978. – Т. 239. – № 1. – С. 84–85.
11. Влияние импульсов электрического тока на подвижность и размножение дислокаций в монокристаллах Zn / В.Е. Громов [и др.] // Проблемы прочности. – 1989.– № 10. – С. 48–53.
12. Франкевич, Е.Л. Магнитный резонанс возбужденных комплексов с переносом заряда, регистрируемый по флуоресценции при комнатной температуре / Е.Л. Франкевич, А.И. Приступа // Письма в ЖЭТФ. – 1976. – Т. 24. – №7. – С. 397–400.
13. О пластической деформации металлов при наличии электрического воздействия / Е.Л.Франкевич [и др.] //ДАН СССР. – 1977. – Т. 236. – С. 1173–1175.
14. Головин, Ю.И. Влияние постоянного магнитного поля на скорость макропластического течения ионных кристаллов / Ю.И. Головин, Р.Б. Моргунов // Письма в ЖЭТФ. – 1995. – Т. 61. – №7. – С. 583–586.
15. Троицкий, О.А. Повышение электропластичности металла в скрещенных электромагнитных полях / О.А. Троицкий, В.С. Савенко // Тяжелое машиностроение. – 2003. – №6. С.8-11.
16. Савенко, В.С. Электронно-пластический эффект при двойникования монокристаллов висмута / В.С Савенко, В.И. Спицин, О.А. Троицкий // Доклады академии наук СССР. – 1985. – Т. 283. – № 5. – С. 1181–1183.
17. Савенко, В.С. Расчет вклада пинч-эффекта и Джоулева тепла в электро-пластичности при двойниковании кристаллов висмута / В.С. Савенко // Весці АН БССР. Сер. фіз-мат. навук. – 1985. – №2. – С. 106.
18. Savenko, V.S. Influence of electroplastic deformation on physicomechanical characteristics of deformation aluminum / V.S. Savenko // First Russia-China Joint Symposium on the electroplasticity effect in metals Shenzhen, China, May 31 – June 4, 2007. – P.218.
19. Савенко, В.С. Эволюция ансамблей клиновидных двойников в монокристаллах висмута, облученных ионами углерода и циркония / В.С. Савенко, О.М. Остриков, В.В. Углов // Кристаллография. – 1999. – №6. – Т. 44. – С. 1-6.
20. Способ повышения пластичности проводящих материалов на основе эффекта Холла: патент Российской Федерации на изобретение, №2052514/ В.С. Савенко, А.И. Пинчук; заявл. 30.07.1991 №5008382; зарегистрирован в Государственном реестре изобретений 20.01.1996.

**Н. В. Сергиевич, М. И. Полоз**

#### ЯДРО АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ТЕСТИРОВАНИЯ «MASTERTEST»

Ранее нами описывался стандартный способ тестирования решения алгоритмической задачи на компьютере [1]. В частности, отмечалось, что способ оценки результатов можно достаточно просто автоматизировать.

Основная цель создания любой системы тестирования – полное исключение человека из процесса проверки. Как правило, это обеспечивает более быструю, качественную и

объективную оценку [2, 3]. Можно выделить следующие основные требования, предъявляемые к подобным системам тестирования: 1) независимость от платформы участника соревнования, 2) автоматическое тестирование в кратчайшие сроки, 3) обслуживание нескольких пользователей одновременно.

При этом структура автоматизированной системы тестирования, очевидно, должна включать как минимум два автономных модуля, обеспечивающих эти возможности, – **ядро** и **серверную часть**.

**Серверная часть** берет на себя функции общения со множеством клиентов и реализует независимость от платформы пользователя. В любой момент времени сервер должен быть готов принять поступившее от пользователя решение некоторой задачи и поставить его в очередь ядра.

**Ядро** тестирующей системы выполняет тестирование пришедших от пользователей решений [4].

В общем виде вся последовательность действий, осуществляемых тестирующей системой при проверке программы пользователя, выглядит следующим образом: 1) получение результата решения задачи – программы (алгоритма) пользователя, 2) определение набора тестов для этой задачи, 3) выполнение тестирования, 4) выдача оценки.

Ядро системы может представлять собой обыкновенное Win32 GUI-приложение, которое периодически проверяет базу данных на предмет появления записей в очереди решений. У такой реализации ядра есть один существенный недостаток: для активизации приложения необходимо, чтобы кто-то запустил программу. Можно, конечно, создать соответствующий ярлык в папке автозагрузки, но это не исправит ситуацию полностью. Дело в том, что для того, чтобы программа запустилась, нужно чтобы пользователем компьютера был осуществлен вход в систему. Кроме того, если Windows-пользователь выйдет из своей учетной записи, то работа ядра прекратится. А это крайне нежелательно.

Проблему можно полностью решить, если написать так называемый «сервис» – программу, стартующую при включении компьютера, резидентно располагающуюся в оперативной памяти и не требующую авторизации. Ядро в этом случае должно являться одним или несколькими сервисами [4, 5].

Как уже говорилось, ядро периодически сканирует базу данных на предмет появления новых входящих решений. Это является основным циклом работы программы.

Пусть обнаружено, что в очередь поступило несколько решений. При тестировании каждое из них проходит следующие этапы:

1. *Инициализация процесса тестирования.* На этом этапе из базы данных берется вся информация о том, кто отправил решение, для какой задачи предназначено это решение, сколько есть тестов для этой задачи, какой был выбран язык программирования и т.д.

2. *Компиляция.* На этом этапе происходит попытка компиляции решения пользователя. Если этот этап завершается неудачно, процесс тестирования прекращается и пользователю сообщается, что программа не прошла данный этап. Если же программа компилируется успешно, то процесс тестирования продолжается.

3. *Проверка решения на тестах.* Для каждой задачи имеется некоторое количество заранее подготовленных тестов. Под тестом в данном случае понимается набор входных данных (файл ввода) и правильный результат для этих данных (файл вывода). Ядро копирует файл ввода в папку с программой. Затем запускается откомпилированный вариант решения и результат программы сравнивается с файлом вывода. Если результат сравнения положительный, то тест считается пройденным. В противном случае процесс тестирования прекращается с выдачей соответствующего сообщения.

4. *Подготовка следующего теста.* Если еще остались непроверенные тесты, то этап №3 повторяется, иначе считается, что программа прошла все тесты, и процесс тестирования также прекращается.

После окончания процесса тестирования заполняется протокол, в котором отражены результаты работы тестируемой программы по каждому проверенному тесту. В зависимости от типа олимпиады (ACM-подобные или нет), пользователю начисляется определенное количество баллов. Как известно, по правилам ACM задача считается принятой только в том случае, когда она прошла все тесты, т.е. можно набрать только 0 или 100 баллов. Если же

олимпиада проводится не по ACM правилам, а по правилам проведения школьных олимпиад, то количество набранных баллов подсчитывается в зависимости от таблицы баллов задачи.

### Общая структура проекта

Исходя из описанных выше требований к ядру и серверной части тестирующей системы, тестирующий модуль должен включать как минимум 6 проектов (см. рис.1).

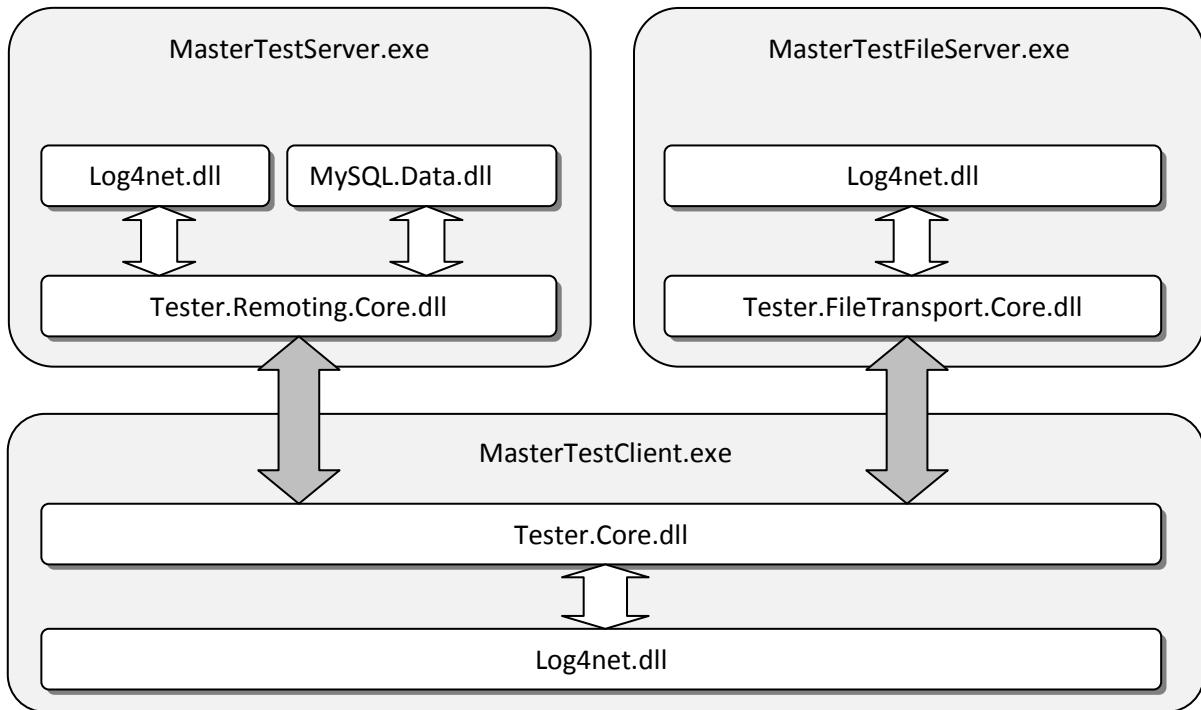


Рисунок 1 – Схема зависимостей проектов

1. **Tester.Remoting.Core.dll.** Реализует логику работы с базой данных, а также содержит описание бизнес-классов для основных таблиц. Доступ к этим классам предоставляется клиенту с помощью технологии .NET Remoting.
2. **Tester.FileTransport.Core.dll.** Реализует логику передачи файлов. Доступ к API данной библиотеки также предоставляется с помощью .NET Remoting.
3. **Tester.Core.dll.** Реализует логику непосредственно тестирующего модуля. Использует две предыдущие сборки.
4. **MasterTestServer.exe.** Реализует сервис, предназначенный для обеспечения доступа к API сборки **Tester.Remoting.Core.dll.**
5. **MasterTestFileServer.exe.** Реализует сервис, предназначенный для обеспечения доступа к API сборки **Tester.FileTransport.Core.dll.**
6. **MasterTestClient.exe:** Реализует сервис, выполняющий функции тестирующего модуля.

### Реализация сервиса передачи файлов

Для выполнения данной задачи реализован механизм передачи файлов в локальной сети. Передача файлов в открытом виде является серьезной уязвимостью, поэтому сервер должен шифровать свои ответы.

В связи с изобилием криптотехнологий существуют различные подходы к их классификации. Официально члены, классифицированные по принципу действия, принято называть криптографическими примитивами (Cryptographic Primitives). Выделяют следующие примитивы.

1. *Шифрование с секретным ключом* (симметричная система) представляет данные в недоступном для третьих лиц виде, используя единый секретный ключ для шифрования и дешифрования.
2. *Шифрование с открытым ключом* (асимметрическая система) представляет данные в недоступном для третьих лиц виде, используя пару из открытого и секретного ключей для шифрования и дешифрования.

3. *Криптографическая подпись* позволяет удостовериться, что данные получены от соответствующего отправителя путём создания цифровой подписи, свойственной лишь данному отправителю. Использует хэш-функции.

4. *Криптографическое хэширование* преобразует данные любой длины в сочетание байтов фиксированной длины. Применяется при верификации данных.

Криптотехники с секретным ключом, или, как их ещё называют, симметричные методы, используют один и тот же ключ для шифрования и дешифрования, поэтому его нужно хранить в секрете от третьих лиц, поскольку, зная ключ и имея соответствующий криптоалгоритм, злоумышленник может дешифровать данные. Симметричные системы отличаются высокой скоростью работы (по сравнению с асимметричными), что позволяет применять их для шифрования крупных объёмов данных.

Среди симметричных алгоритмов можно выделить следующие: DES (Data Encryption Standard), DES 2, различные вариации TripleDES, Rijndael/AES (Advanced Encryption Standard), RC2, RC4 и другие. Если взглянуть на их алгоритмы, то очевидно, что многие из них основаны на операторе XOR. Вообще, впервые оператор “исключающее или” был применён в так называемом методе одноразовых блокнотов, изученном Клодом Шенноном. Действовал этот метод по следующему принципу: бралась строка исходного текста и строка ключа такой же длины, после чего каждый символ исходного текста «XOR’ился» с соответствующим символом строки ключа. Этот метод работает и как шифровщик, и как дешифровщик, поскольку повторный вызов функции XOR возвращает исходное значение.

В тестирующей системе реализован класс, использующий 2 следующих метода.

1. **CheckFileExists** – проверяет наличие файла и шифрует ответ алгоритмом RC2 с предоставленными ему ключом и вектором инициализации.

2. **GetFileStream** – получает файл, зашифрованный алгоритмом RC2, с предоставленными ему ключом и вектором инициализации.

На стороне клиента реализован скрытый класс **SecureTransportFile**, который дешифрует полученный ответ.

#### Реализация менеджера распределения очереди задач

Одной из функций менеджера распределения очереди задач является работа с базой данных. Только этот модуль будет осуществлять такого рода деятельность. Это следует учитывать при администрировании системы тестирования в целом.

На рисунке 2 приведена схема, содержащая используемые таблицы вместе с их адаптерами. Набор приведенных классов образует уровень доступа к данным.

Следующим идет уровень бизнес-классов. На этом уровне все необходимые данные берутся из уровня доступа к данным. Прямого обращения к базе данных не происходит. Такой подход позволяет абстрагироваться от какой-либо конкретной СУБД и оперировать не данными, а объектами.

В системе используются 7 бизнес-объектов:

1. **Compiler**. Содержит всю необходимую информацию о выбранном компиляторе. Инициализируется на клиенте, но выполняется на сервере.

2. **IncomingItem**. Данный класс отличается от всех остальных тем, что создается непосредственно на сервере, а затем передается клиенту. Данный класс не имеет никаких методов.

3. **Olymp**. Содержит всю необходимую информацию об олимпиаде. Инициализируется на клиенте, но выполняется на сервере.

4. **Task**. Содержит всю необходимую информацию о задаче. Инициализируется на клиенте, но выполняется на сервере.

5. **Protocol**. Класс предназначен для изменения протокола как в целом для задачи, так и для одного конкретного теста.

6. **ResultManager**. Основной задачей данного класса является обновление таблицы результатов.

7. **TaskDispatcher**. Данный класс предназначен для резервирования определенного количества элементов очереди для того или иного тестирующего модуля. Жесткое резервирование необходимо для предотвращения одновременного тестирования одного и того же решения двумя и более тестирующими модулями. По окончанию тестирования модуль сообщает диспетчеру список элементов, успешно им обработанных. Эти элементы будут удалены.

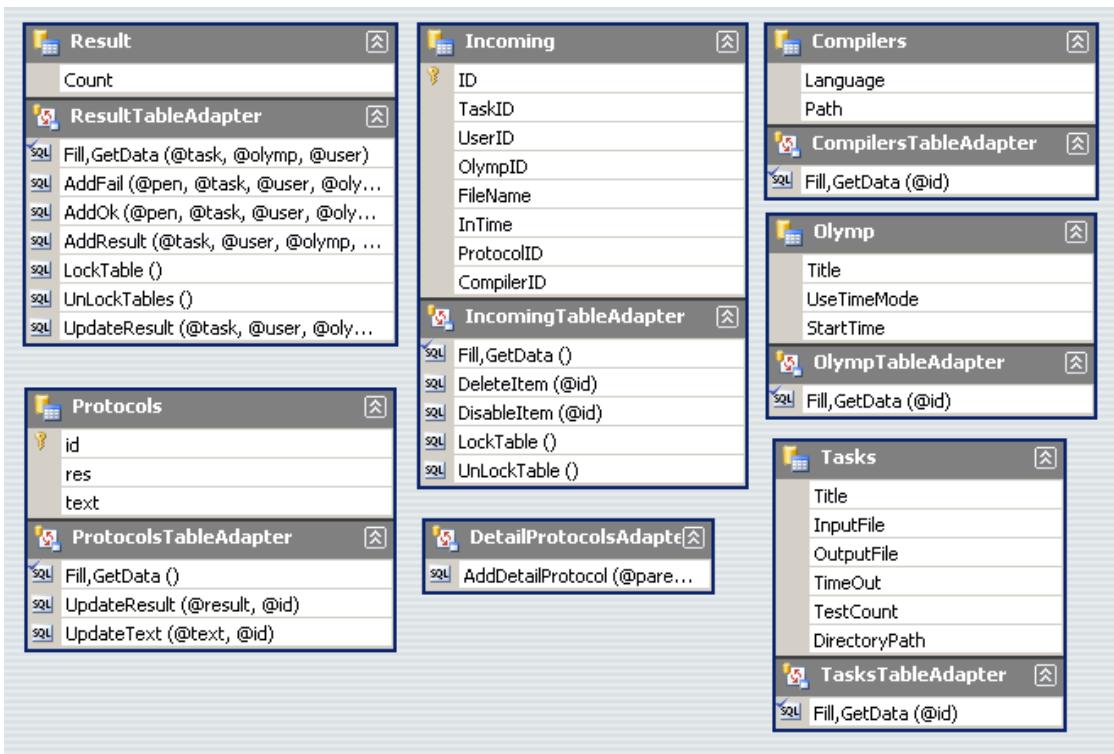


Рисунок 2 – Схема использования таблиц и их адаптеров

#### Литература

- Сергиевич, Н.В. Автоматизация проверки решений задач по программированию / Н.В. Сергиевич, М.И. Полоз // Сборник работ преподавателей физико-математического факультета. – Мозырь: УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2011.
- Сергиевич, Н. В. О структуре базы данных автоматизированной системы тестирования «MasterTest» / Сергиевич, Н. В. // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам = Innovative technologies of physics and mathematics' training: материалы V Междунар. науч.-практ. интернет-конф.; Мозырь, 26-29 марта. 2013 г. / УО МГПУ им. И.П. Шамякина; редкол.: И.Н. Ковалчук (отв.ред.) [и др.]. – Мозырь, 2013. – С. 64-67.
- Сергиевич, Н. В. О преподавании алгоритмизации и программирования в средней школе // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам: материалы Междунар. науч.-практ. Интернет-конф., 27-31 окт. 2008 г., г. Мозырь / редкол.: В.В. Валетов (отв.ред.) [и др.]. – Мозырь: УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2008. – С. 144-147.
- Лопато В. М. О разработке автоматизированной системы тестирования // Инновации-2004: материалы XI Респ. студ. науч.-практ. конф., 22 апреля 2004 г., Мозырь: в 2 ч. – Ч.1. – Мозырь: УО МГПУ, 2004 – С. 89.
- Лещенко В. В. О подходе к реализации тестирующего модуля в автоматизированной системе тестирования // Инновации-2004: материалы XI Респ. студ. науч.-практ. конф., 22 апреля 2004 г., Мозырь: в 2 ч. – Ч.1. – Мозырь: УО МГПУ, 2004 – С. 89.

О. И. Терещенко, М. И. Ефремова

#### МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ АКТИВИЗАЦИИ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Одной из основных задач, которую будет решать будущий учитель математики, – это развитие творческого мышления учащихся. Посещая уроки учителей математики во время педагогических практик, мы обращаем внимание студентов на то, как эту проблему решает опытный учитель. Будущий учитель математики на основании достижений психологической и педагогической науки должен будет применить конкретные приемы и формы развития мышления учащихся, активизации их познавательной деятельности в единстве с овладением

основами математической науки. В рамках сотрудничества филиала кафедры математики и методики преподавания математики УО «Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина» со школами Мозырского района мы предлагаем учителям математики осуществлять эмпирический поиск наиболее эффективных методических приемов, направленных на самостоятельное приобретение учащимися новых знаний, на развитие творческой деятельности.

В этом синтезе применения науки и эмпирики по развитию мышления учащихся прослеживается четкая система. Путь формирования мышления учащихся осуществляется введением в обучение творческих заданий как познавательного характера, так и заданий, побуждающих учащихся к поисковой деятельности.

Кратко проанализируем методические находки, которые, по нашему мнению, направлены на создание атмосферы творческого поиска, радости учения. Известным является тот факт, что очень важна тщательная подготовка учащихся к восприятию новых знаний. Она должна быть такой, чтобы актуализированные знания были основой для усвоения новых знаний. Учителя математики это важное звено в учебном процессе игнорируют, допуская, что учащиеся достаточно подготовлены для изучения новых понятий, теорем, утверждений. В результате учащиеся встречаются с огромными трудностями при усвоении новых знаний.

Для целенаправленной актуализации мы предлагаем учителям математики применить систему эвристических вопросов и подготовительных задач. В основе выбора такой системы положены сформированные у учащихся умения, необходимые для усвоения новых знаний.

Хорошо продуманная система подготовительных задач дает возможность учащимся осознать диалектическое единство известного и неизвестного, представить изучаемый материал в новом свете, творчески применить усвоенные способы решения математических задач в новых ситуациях. А это позволит новым знаниям не «добавляться» к уже известным, а «вращаться» в них, а иногда и вступать с ними в противоречия. Поэтому каждое задание носит развивающий характер, что проявляется в том, что учащиеся могут изменить задачу, раскрыть в ней новые стороны, соотнести разные элементы, выделить те, которые раньше были скрыты в данном материале.

Соединить воедино выработку умений и навыков и «открытие» нового – дело нелегкое, требует творческого подхода к приобретению учащимися новых знаний. Поэтому особое внимание следует уделить формированию у школьников общепознавательных приемов, таких, как разностороннее рассмотрение изучаемого понятия, выделение существенных связей, интерпретация полученного результата на языке родственной науки.

Особое внимание на уроках математики следует уделить заданиям, которые требуют проведения определенного исследования. Это можно объяснить тем, что исследование – одно из важнейших средств развития логического мышления и творческих способностей учащихся. Их решение способствует уяснению изучаемого учебного материала, приучает учащихся к обоснованным выводам, к логическим рассуждениям. А это создает условия активизации познавательного интереса к изучаемому материалу.

Для активизации учебной деятельности учащихся на уроках обобщающего повторения следует предложить задачи, которые можно решить несколькими способами. Это поможет учащимся отыскать наиболее оригинальное, рациональное решение.

Важным методом, способствующим воспитанию познавательной активности учащихся на уроках математики, является создание учебных проблемных ситуаций. Если проблемная ситуация создана разумно, то это настраивает учащихся на активный поиск закономерностей, установление новых фактов и необходимость их обоснования.

На уроках математики проблему может формулировать сам учитель или учащиеся. В зависимости от степени участия учащихся в намеченной работе можно говорить о различных уровнях проблемности. Можно выделить следующие: учитель, создав проблемную ситуацию, сам выдвигает проблему и намечает пути ее решения; в поисках путей решения сформулированной проблемы активное участие принимают учащиеся; при решении проблемы учащиеся формулируют гипотезу и пытаются найти пути ее обоснования, доказательства; учащиеся выполняют определенные задания творческого характера, требующие логического анализа и догадки, «открытия» нового способа решения учебной проблемы, самостоятельного доказательства, самостоятельных выводов и обобщений.

Выбор уровня проблемности прежде всего зависит от содержания изучаемого материала, подготовленности класса к самостоятельному поиску решения различных вопросов жизни и практики.

Мы убедились в том, что использование проблемного подхода на различных этапах обучения способствует не только пробуждению интереса учащихся к изучению программного материала, но и приводит к активной мыслительной деятельности, поиску различных доказательств того или иного утверждения, теоремы, способов решения задач.

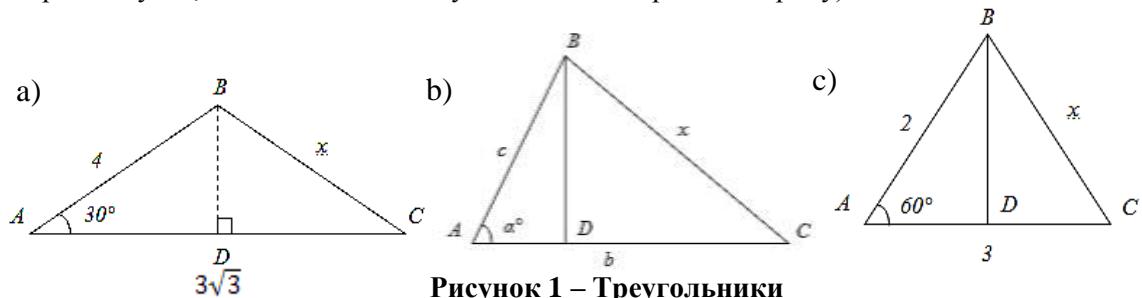
Проблемные ситуации, формулировка проблем, выдвижение и доказательство гипотез на уроках математики должны быть как при введении новых понятий, изучении новых теорем, так и при решении задач. Создание проблемной ситуации и формулировка вытекающей из нее проблемы является переходным моментом от работы на этапе актуализации знаний к изучению нового материала при решении задач.

Самостоятельное приобретение учащимися новых знаний – творческий процесс. Большую помощь при этом оказывает введение в обучение выполнения познавательных заданий. Такие задания можно предлагать как на этапе изучения нового материала, так и на этапе его закрепления. Выполняя их, учащиеся получают более глубокие знания о структуре задачи и процессе ее решения, что в свою очередь способствует развитию интереса учащихся к поиску нового.

Задания нужно подобрать так, чтобы анализ задачной ситуации учащиеся смогли осуществлять двумя способами: 1) на основе построений и измерений, 2) с помощью вывода логических следствий из выбранных условий. В первом условии учащиеся выдвигают гипотезу, которая становится новым знанием только после ее обоснования или доказательства. Во втором случае полученное новое знание не нуждается в дополнительном доказательстве.

В зависимости от уровня проблемности работу учащихся над доказательством выдвинутой гипотезы можно организовать по-разному: 1) доказательство сообщает сам учитель; 2) доказательство изучается учащимися по учебнику; 3) учащиеся готовятся к самостоятельным поискам доказательства через систему устных подготовительных упражнений; 4) учащимся сообщается план, по которому они ведут доказательство; 5) доказательство полностью проводят сами ученики, если оно не вызывает у них трудностей.

Приведем некоторые примеры. При изучении теоремы косинусов учащимся можно предложить решить три аналогичные задачи по данным, которые были предложены на рисунках (рисунок 1), предварительно сформировав условие задачи. (В треугольнике даны две стороны и угол, заключенный между ними. Найти третью сторону).



Для решения первой задачи учащимся можно дать указания: провести высоту BD (рисунок 1). Учащиеся могут предложить различные варианты решения данной задачи. Из всех можно выбрать следующий:

$$\Delta ABD: BD = AB \cdot \sin 30^\circ; AD = AB \cdot \cos 30^\circ; DC = AC - AD. \Delta BDC: x^2 = BD^2 + DC^2.$$

Этот способ дает учащимся возможность успешно решить задачу в общем виде. Намеченный путь решения можно закрепить второй задачей, а затем решить в общем виде:

$$\Delta ABD: BD = c \cdot \sin \alpha^\circ; AD = c \cdot \cos \alpha^\circ; DC = AC - AD = b - c \cdot \cos \alpha^\circ.$$

$$\Delta BDC: x^2 = c^2 \cdot \sin^2 \alpha + (b - c \cdot \cos \alpha)^2 + c^2 \cdot \cos^2 \alpha = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha.$$

Предлагаемые задачи нужно располагать с нарастающей степенью трудности. Предложенные задачи доступны учащимся, и их решение привело к мысли о существовании некоторой закономерности. Полученный результат формулируется в виде теоремы. Дальше учащиеся убеждаются в том, что найденная закономерность имеет место для угла  $\alpha$  любой

величины. Учащиеся приходят к доказательству теоремы для остальных случаев:  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ;  $\alpha = 90^\circ$ .

Такой прием можно применить и при изучении теоремы синусов.

Рассматривается прямоугольный треугольник с углом  $30^\circ$  (рисунок 2).

Выясняются вопросы:

1. Пропорциональны ли длины сторон треугольника величинам углов, лежащих против них?

$$\text{(нет). } \frac{a}{c} = \frac{1}{2}; \frac{30^\circ}{90^\circ} = \frac{1}{3}.$$

2. Существует ли в треугольнике зависимость между величинами углов и синусами этих углов?

$$\text{Оказывается, нет, в чем убеждает пример: } \frac{30^\circ}{90^\circ} = \frac{1}{3}; \frac{\sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{2}.$$

3. Пропорциональны ли в треугольнике длины сторон синусам противолежащих сторон? Рассматривается треугольник, изображенный выше. Учащиеся высказывают гипотезу о пропорциональности, так как  $\frac{\sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{2}; \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$ .

Сделано «открытие». Формулируется теорема синусов и доказывается. После доказательства учащиеся интересуются, пропорциональны ли стороны треугольника косинусам, тангенсам противолежащих углов. Поиски продолжаются.

Большие возможности для активизации познавательной деятельности учащихся открывает система упражнений закрепления учебного материала. Каждое такое упражнение должно выполнять развивающие функции. Этого можно достичь, если уделить внимание решению нестандартных упражнений. Именно такие упражнения помогают углубленно раскрыть каждое новое понятие, каждое изучаемое утверждение, и, более того, активизирует не только творческое мышление учащихся, но и способствует повышению интереса к изучаемому учащимися материалу, развитию их способностей.

I. Приведем примеры таких упражнений.

$$1) \text{ Решить системы: } \begin{cases} x^5 + 3x^2y^2 - 8x^3 - 10xy + 7 = 7, \\ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение  $x=0, y=0$ , т.к. второе уравнение имеет одно решение, которое удовлетворяет первому уравнению.

$$2) \begin{cases} x^4 - 3x^2y + 7xy + 8xy^2 + 10 = 18, \\ x^2 + y^2 = -3. \end{cases}$$

Система не имеет решений, т.к. не имеет решений второе уравнение.

$$3) \begin{cases} x^7 + 3x^3y^4 + 5 = 8, \\ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Система не имеет решений, т.к. решение  $x=0, y=0$  второго уравнения не удовлетворяет первому уравнению.

II. Составить систему уравнений, которая имела бы данное решение:  $\{(1;1), (-1;-1), (-1;1), (1;-1)\}$ . Учащимся были предложены следующие системы:

$$a) \begin{cases} |x| = 1, \\ |y| = 1; \end{cases} b) \begin{cases} (|x|-1) \cdot (|y|-1) = 0, \\ x^2 + y^2 = 2; \end{cases} c) \begin{cases} (x-1) \cdot (x+1) = 0, \\ (y-1) \cdot (y+1) = 0; \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 = y^2, \\ x^2y^2 = 1; \end{cases} e) \begin{cases} |xy| = 1, \\ x^2 - y^2 = 0; \end{cases} f) \begin{cases} |x| \cdot |y| = 1, \\ x^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

III. Сравнить значения выражений при различных значениях переменной:

- $a$  и  $2; b$  и  $-b$ ;      •  $\frac{1}{a-b}$  и  $a-b$ ,      •  $a$  и  $a^2$ ,
- $st$  и  $-c$ ,      •  $\frac{5}{x}$  и  $\frac{5}{|x|}$ ,      •  $a^3$  и  $a^2$ ,
- $a-b$  и  $b-a$ ,      •  $-\frac{5}{|x|}$  и  $-\frac{5}{x}$ ,      •  $2^n$  и  $2^{n+1}$  ( $n \in N$ ),
- $|a-b|$  и  $|b-a|$ ,      •  $(\frac{1}{2})^n$  и  $(\frac{1}{2})^{n+1}$  ( $n \in N$ ).

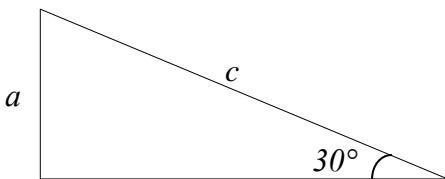


Рисунок 2 – Треугольник с углом  $30^\circ$

IV. Что больше?

a)  $a$  или  $\frac{1}{|a|}$ ? ( $a = 1, a = \frac{1}{|a|}; a > 1, a > \frac{1}{|a|}; a < 1, a < \frac{1}{|a|}$ ).

b)  $a - |a|$  или  $|a| + a$ ? ( $a > 0, |a| + a > |a| - a; a < 0, |a| + a < |a| - a$ ;  
 $a = 0, |a| + a = |a| - a$ ).

c)  $|a| + 1$  или  $|a+1|$ ? ( $a \geq 0, |a| + 1 = |a + 1|; a < 0, |a| + 1 > |a + 1|$ ).

V. При каких значениях переменных истинные такие соотношения:

$$m + n = m, m + n > n; m + n < n; m - n = m; mn = 0; \frac{m}{n} = 1; \frac{m}{n} = -1; x = x^2;$$

$$x = x^3; x^2 = x^4; m + s = m; 6a = 5b; 0 \cdot x = 0; \frac{2}{x} > 2; \frac{1}{x} = 0,5; a < |a|;$$

$$-a > |-a|; \frac{5}{n} < 0; \frac{1}{x} > 1; (a - b)^2 = (b - a)^2; (a - b)^4 = (b - a)^4; (a - b)^3 = (b - a)^3.$$

Как обобщить последние три задания?

Каждое из приведенных упражнений можно упростить, если наложить определенные ограничения на переменные (считать их положительными, целыми числами и т.д.).

VI. Найти значения выражений при различных значениях переменной:  
 $\frac{|x|}{x}, \frac{x}{|x|}, \frac{|x^2|}{x}, -\frac{|x|}{x}, -\frac{x}{|x|}$ .

VII. Какие высказывания являются истинными?

a) Сумма двух четных чисел есть четное число;

b) Сумма двух нечетных чисел есть четное число;

c) Сумма четного и нечетного чисел есть число нечетное;

d)  $|a| - a = |-a| + a$ ; e)  $|a + 1| = |a| + 1$ .

VIII. Не выполняя никаких преобразований, решить уравнения:

a)  $|x| + x = 0$ ;

g)  $|x - 2| = |2 - x|$ ;

b)  $|x| + x = 2x$ ;

h)  $\frac{1}{|x-1|} = \frac{1}{1-x}$ ;

c)  $|x| - x = 0$ ;

i)  $|x^2 - 6x - 7| = \sqrt{3} - 2$ .

d)  $|x| - x = -2x$ ;

e)  $|x^4 - 5x^3 + 3x + 8| = -2$ ;

f)  $x^2 + y^2 = 0$ ;

При решении первых четырех упражнений учащиеся вспоминают, что такое корень уравнения, и ищут его среди таких значений переменной  $x: x < 0, x > 0, x = 0$ . Например, при решении уравнения  $|x| + x = 0$  учащиеся рассуждают так: если  $x > 0$ , то сумма двух положительных чисел – число положительное, что не удовлетворяет условию; если  $x < 0$ , то сумма двух противоположных чисел равна нулю, следовательно, для всех  $x < 0$  условие удовлетворяется. При  $x = 0$  сумма  $|x| + x = 0$ . Ответ:  $= x \in (-\infty; 0]$ .

IX. Как расположены данные точки в прямоугольной системе координат при условии, что  $x \neq 0, y \neq 0$ :

- a)  $A(x; y)$  и  $B(|x|; y)$ . (При  $x > 0$  точки совпадают; при  $x < 0$  – симметричны относительно оси  $OY$ ).
- b)  $A(x; y)$  и  $B(x; |y|)$ . (При  $y > 0$  точки совпадают; при  $y < 0$  – симметричны относительно оси  $OX$ ).
- c)  $A(x; y)$  и  $B(|x|; |y|)$ . (При  $x > 0, y > 0$  точки совпадают; при  $x > 0, y < 0$  – симметричны относительно оси  $OX$ ; при  $x < 0, y > 0$  – симметричны относительно оси  $OY$ ; при  $x < 0, y < 0$  – симметричны относительно начала координат).

В дальнейшем полученные выводы учащиеся используют при построении графиков функций вида  $y = 7|x|$ ,  $y = -7|x|$  и другие.

Выполняя алгебраические преобразования, учащиеся не только получают результат, но и исследуют его. Например, ответ  $y^2 + 1$ , полученный при приведении выражения  $(y + 2) \cdot (y - 2) + 5$  к стандартному виду, исследуется учащимися так:

- 1)  $y^2 + 1$  больше нуля при всех значениях  $y$ ; 3)  $y^2 + 1$  – нечетное число, если  $y$  – четное;
- 2) Наименьшее значение многочлена равно 1; 4)  $y^2 + 1$  – четное число, если  $y$  – нечетное.

Изучая математику, учащиеся должны не только овладеть определенной суммой математических знаний, но и научиться эффективно их применять при решении различных математических задач. Именно задача является носителем знаний и умений учащихся, определенным стимулятором активизации познавательной деятельности учащихся, средством связи теории и практики.

С.Д. Шаврей

## ЗАВИСИМОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК ДВОЙНИКОВЫХ ГРАНИЦ ОТ ПАРАМЕТРОВ ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

С целью более глубокого изучения механизмов пластической деформации металлов в условиях воздействия магнитного поля (МП) и импульсного электрического тока (ЭТ) целесообразно рассмотреть поведение металла в процессе его пластического деформирования на уровне отдельных дислокационных ансамблей. Дислокационные скопления связаны с неоднородностью пластической деформации в пространстве [1], [2]. Пространственная неоднородность обусловлена локализацией деформации в полосах скольжения, т.е. с накоплением в кристалле локальных, незавершенных сдвигов. Удобным модельным объектом являются в этом смысле клиновидные двойники, образующиеся при вдавливании алмазного индентора в плоскость спайности (111) кристаллов висмута. Процесс пластической деформации при механическом двойниковании локализован на границе двойника. Это дает основания полагать, что изучение движения границ двойника при совместном воздействии внешних полей и механической нагрузки позволит понять основные закономерности пластического течения материала.

Монокристаллические образцы висмута химической чистоты 99,97% имели форму прямоугольных призм и размеры 5×5×15мм. Для достижения однородности МП образцы закреплялись с помощью специального устройства, изготовленного из неферромагнитных металлов, в геометрическом центре сердечника электромагнита на высоте 10см от стального столика микротвердомера ПМТ-3. Непосредственные измерения, выполненные с помощью датчика Холла, показали, что неоднородность МП вдоль образца не превышала 2%. С целью устранения инструментальных эффектов стальные детали ПМТ-3, находившиеся в МП (оправка стандартной пирамиды Виккерса, грузы на штоке индентора), заменялись деталями, изготовленными из неферромагнитных металлов. Сосредоточенная нагрузка прикладывалась перпендикулярно свежесколотой плоскости спайности (111) кристаллов висмута. При таком способе нагружения возникают линзовидные двойники системы {110}<001>, которые легко прорастают вглубь кристалла под действием внешней силы и при выходе на свободную поверхность имеют форму клина. При пропускании импульса тока образец закреплялся между массивными электрическими контактами. Различный набор емкостей батареи конденсаторов позволял изменять длительность импульсов тока. Усреднение проводилось по результатам измерений размеров двойников не менее 20 отпечатков.

Исследуемая плоскость образца была параллельна вектору индукции МП  $B$  и вектору плотности тока  $j$ . Вектора  $B$  и  $j$  были взаимоперпендикулярны. Форма токовых импульсов была близка к треугольной. Плотность тока рассчитывалась по формуле  $j=I/S$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения образца,  $I$  – сила тока. При разрядке конденсатора сила тока определялась

по формуле  $I = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau_{RC}}$ , где  $U_0$  – максимальное напряжение на заряженной батарее конденсаторов,  $R$  – сопротивление электрической цепи (кристалла, контактов, соединительных проводов и др.),  $C$  – емкость батареи конденсаторов. Время  $\tau=RC$ , при котором сила тока в цепи уменьшается в  $e$  раз, считалось длительностью импульса.

В работах [1]–[4] обнаружено, что одновременное воздействие на кристаллы висмута импульсного электрического тока и постоянного МП приводит к стимулированию пластической деформации двойникования. Возможное влияние побочных физических эффектов при таком способе деформирования (тепловой разогрев, магниторезистивный эффект, скин-эффект, пинч-эффект, магнитопластический эффект и др.) подробно рассмотрено

в [5], где сообщается, что вклад указанных явлений в дополнительную, стимулированную внешним электромагнитным полем деформацию, крайне незначителен. Там же показано, что наблюдаемый эффект пластификации не может быть тривиально объяснен недостаточно жестким креплением образца с последующим его «накалыванием» на индентор силой Ампера.

В работе [3] была выдвинута гипотеза, согласно которой импульс тока, а также другие внешние энергетические воздействия выступают в роли инициатора разрядки напряжений дислокационных скоплений. Наблюдаемый в этом случае скачок деформации осуществляется за счет снижения энергии внутренних напряжений, накопленных в процессе предварительной пластической деформации. Для подтверждения этой теории изучалось совместное влияние импульсов тока и/или постоянного МП на среднюю линейную плотность двойникующих дислокаций  $\rho$ .

Экспериментально получено, что при увеличении нагрузки на индентор, ведущему к росту двойника без воздействия внешних полей,  $\rho$  остается неизменной (в пределах экспериментальной погрешности). Если одновременное воздействие импульсов тока и постоянного МП, которое приводит к значительному скачку деформации, выступает в роли инициатора разрядки напряжений, созданных скоплениями двойникующих дислокаций, то средняя линейная плотность таких дислокаций должна уменьшаться.

Импульс тока, имевший длительность  $t_{\text{imp}}=4 \cdot 10^{-4}$  с, пропускался при одновременном микроиндейтинговании плоскости (111). Амплитуда плотности импульсов тока варьировалась в пределах  $j_{\text{imp}}=0-75$  А/мм<sup>2</sup>. Индукция постоянного МП в зазоре сердечника электромагнита, куда помещался образец, была равна  $B=0,2$  Тл. Вес груза на штоке индентора был постоянен  $P=0,14$  Н.

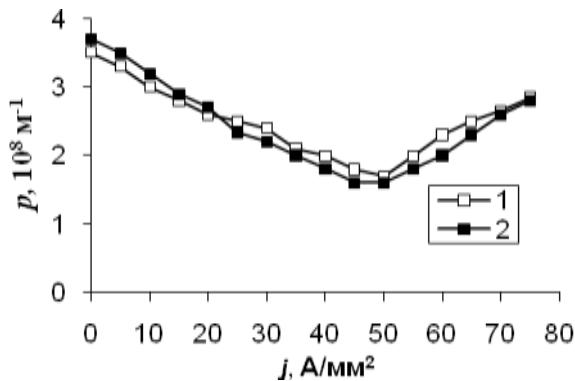
На рисунке 1 показана зависимость средней линейной плотности двойникующих дислокаций  $\rho$  от амплитуды плотности импульсного тока  $j_{\text{imp}}$ . Под воздействием внешних полей имеет место ярко выраженный эффект падения  $\rho$  (примерно в 2 раза) в интервале  $j_{\text{imp}}=0-50$  А/мм<sup>2</sup>. Поскольку отношение  $L/h$  есть дистанция между двойникующими дислокациями, выраженная в межатомных расстояниях [6], то из анализа хода линий на рисунке 1 можно сделать вывод о том, что среднее междислокационное расстояние существенно увеличивается и силы отталкивания между одноименными двойникующими дислокациями снижаются. С точки зрения энергетического подхода, это означает, что рост двойниковой прослойки, т. е. удлинение клиновидного двойника, происходит за счет снижения энергии локальных упругих напряжений, запасенных в ходе предварительной пластической деформации.

На рисунке 2 показана зависимость средней линейной плотности двойникующих дислокаций  $\rho$  от величины сосредоточенной нагрузки  $P$ . Видно, что без воздействия электромагнитного поля на кристалл (линия а)  $\rho$  остается постоянной в пределах экспериментальной погрешности, т. е. среднее междислокационное расстояние остается стабильным и силы отталкивания между одноименными двойникующими дислокациями неизменны. Анализ хода линий б и с показывает, что одновременное приложение постоянного МП и пропускание импульсов тока качественно меняет картину пластической деформации двойникования. В этом случае имеет место ярко выраженное падение средней плотности двойникующих дислокаций  $\rho$ . Наблюдаемый эффект заметно возрастет с увеличением  $P$ , что связано с ростом мощности дислокационных скоплений дислокаций. В этом случае междислокационное расстояние увеличивается. Это подтверждает вывод о том, что удлинение двойника происходит за счет снижения энергии локальных упругих напряжений, запасенных в ходе предварительной пластической деформации. Одновременное приложение постоянного МП и пропускание импульсного электрического тока выступает в роли активирующего возбуждения, которое интенсифицирует процесс двойникования [1]–[4].

Структурные несовершенства кристалла выступают стопорами для движущихся двойникующих дислокаций. Такими стопорами для растущего двойникового клина могут быть двойниковые прослойки другой ориентации, дислокации леса, пороги и перегибы на дислокациях различного типа.

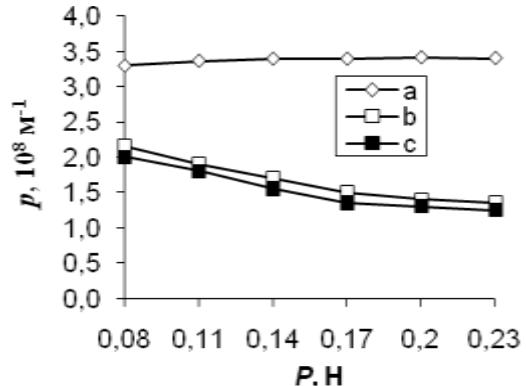
Дислокация преодолевает препятствие, разгоняется на свободном участке и атакует следующее препятствие, обладая уже повышенной кинетической энергией за счет упругих напряжений скопления дислокаций. В зависимости от уровня полученной энергии происходит либо преодоление дислокацией нового препятствия, либо остановка дислокации в ожидании дальнейшего увеличения приложенных напряжений при активном нагружении металла. ЭПД

является откликом всего дислокационного ансамбля на действие тока. Импульс тока лишь инициирует открепление дислокационных скоплений от стопоров. Наличие в кристалле подобных структурных несовершенств приводит к значительному разбросу длин двойников не только в пределах одного образца, но даже у одного отпечатка. Геометрические размеры двойников являются структурнозависимыми характеристиками. Степень разброса их размеров может служить мерой совершенства кристалла в различных его частях. Поэтому в качестве основного количественного параметра, характеризующего механизм пластической деформации двойникование при приложении внешних полей, выбрана средняя линейная плотность двойникообразующих дислокаций  $\rho$ .



(1 – положительный заряд на плоскости (111),  
2 – отрицательный заряд на плоскости (111))

Рисунок 1 – Зависимость средней линейной плотности двойникообразующих дислокаций  $\rho$  от амплитуды плотности импульсного тока  $j$



(а – нет заряда на плоскости (111),  
б – положительный заряд на плоскости (111),  
с – отрицательный заряд на плоскости (111))

Рисунок 2 – Зависимость средней линейной плотности двойникообразующих дислокаций  $\rho$  от нагрузки  $P$

К настоящему времени установлено, что образцам с высокой твердостью соответствует низкая подвижность дислокаций. Однако в некоторых случаях уменьшение микротвердости связано не с увеличением подвижности дислокаций, а с увеличением ширины лучей дислокационных розеток [7].

Из анализа хода линий на рисунке 3 видно, что совместное воздействие постоянного МП и импульсов тока на монокристаллы висмута увеличивает подвижность ансамблей двойникообразующих дислокаций  $\gamma$  в интервале плотности тока  $j_{\text{imp}}=0-45 \text{ A/mm}^2$ . Дальнейшее увеличение плотности тока  $j_{\text{imp}}=45-75 \text{ A/mm}^2$  приводит к обратному эффекту.

Изменение пластичности кристаллов висмута при различной плотности импульсов тока сопровождается изменением стартовых напряжений двойникообразующих дислокаций  $P/L_m^2$ . Из хода линий, изображенных на рисунке 4, следует, что  $P/L_m^2$  уменьшается с ростом амплитуды токового импульса в интервале  $j_{\text{imp}}=0-45 \text{ A/mm}^2$  и увеличивается в интервале  $j_{\text{imp}}=45-75 \text{ A/mm}^2$ .

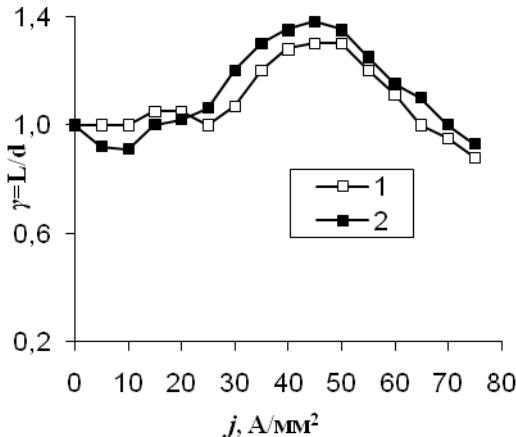
В [2], [3] пластификация кристаллов висмута связывается с такими факторами, как упругий механический импульс малой амплитуды, создаваемый силой Ампера, и поверхностный электрический заряд от эффекта Холла. В [3] получено, что увеличение плотности импульсного тока от  $j_{\text{imp}}=50 \text{ A/mm}^2$  до  $j_{\text{imp}}=80 \text{ A/mm}^2$  приводит к уменьшению дополнительной, стимулированной внешними полями, пластической деформации. Важно отметить, что ЭПЭ в кристаллах висмута при воздействии на них только импульсного тока начинает проявляться после достижения порогового значения плотности тока в  $50 \text{ A/mm}^2$  [8]. В нашем случае в этой области плотностей импульсного тока имеет место увеличение микротвердости и средней линейной плотности двойникообразующих дислокаций, т. е. кристалл упрочняется.

Как уже отмечалось, причина этого явления может быть обусловлена взаимным гашением электропластического эффекта и эффекта пластификации в кристаллах висмута, возникающего при одновременном приложении к образцу ортогональных постоянного магнитного и импульсного электрического полей.

Из представленных рисунков 3 и 4 видно, что эффект пластификации проявляется в несколько большей степени при отрицательном заряде на плоскости (111) монокристаллов висмута.

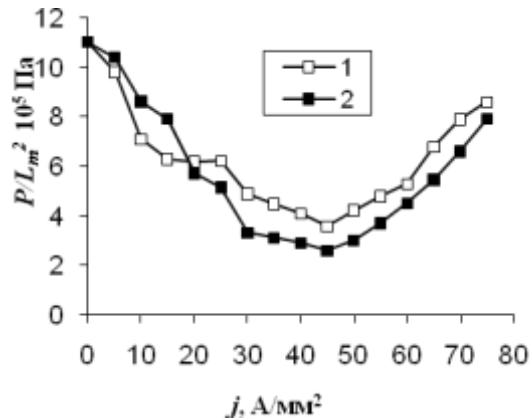
Это связано с тем, что знак амплитуды механического импульса в этом случае был таков, что создаваемые им упругие напряжения противоположны напряжениям, создаваемым индентором.

Схожее явление снижения эффекта пластификации наблюдалось в [9], [10]. Воздействие на образец ультразвука и электрического поля приводило к снижению суммарного эффекта пластификации при любой разности фаз между импульсом тока и акустической волной в образце.



(1 – положительный заряд на плоскости (111), 2 – отрицательный заряд на плоскости (111))

Рисунок 3 – Зависимость подвижности двойникообразующих дислокаций  $\gamma$  от амплитуды плотности тока  $j_{\text{imp}}$



(1 – положительный заряд на плоскости (111),  
2 – отрицательный заряд на плоскости (111))

Рисунок 4 – Зависимость напряжений старта двойникообразующих дислокаций  $P/L_m^2$  от амплитуды плотности тока  $j_{\text{imp}}$

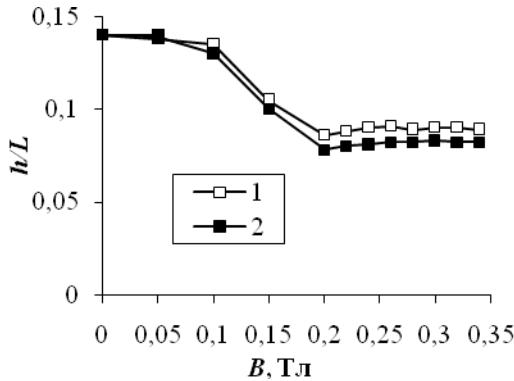
В [11] на основе экспериментальных данных указывается на упрочнение металлов при наличии на свободной поверхности электрического заряда. Это явление объяснено увеличением работы образования поверхностного рельефа, что обусловлено ростом энергии электрического поля при деформации заряженной поверхности металла. С другой стороны, данные работы [2] свидетельствуют о наличии пластифицирующего влияния поверхностного электрического заряда на двойникование в случае микрондентирования образцов кристаллов висмута. Поэтому представляет интерес выяснить причины этого противоречия.

Поверхностный электрический заряд плотностью  $\sigma$  создавался на индентируемой плоскости спайности (111) кристаллов висмута за счет эффекта Холла, возникающего при наложении на образец постоянного МП и пропускании в ортогональном направлении импульса электрического тока. Из формулы напряженности холловского поля  $E_h = RBj_{\text{imp}}$  ( $R$  – коэффициент Холла,  $B$  – индукция МП,  $j_{\text{imp}}$  – плотность импульсного тока в кристалле) видно, что увеличение поверхностной плотности электрического заряда возможно за счет роста как плотности импульса тока, так и индукции постоянного МП.

Импульсы тока создавались путем разрядки батареи конденсаторов и имели длительность  $t_{\text{imp}} = 4 \cdot 10^{-4}$  с и амплитуду плотности тока  $j_{\text{imp}} = 40 \text{ A/mm}^2$ . Индукция МП изменялась в интервале  $B = 0 - 0,35 \text{ Тл}$ . Вес груза на штоке индентора был постоянен и равен  $P = 0,14 \text{ Н}$ .

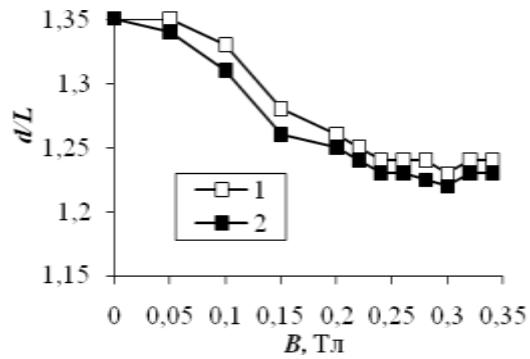
Выбранная методика не позволяла проводить отдельное изучение влияния упругого импульса и поверхностного электрического заряда. Для определения вклада поверхностного электрического заряда в дополнительное двойникование необходимо устранить хотя бы один из эффектов, вызывающих в образце импульсные упругие деформации. Поэтому увеличение плотности поверхностного электрического заряда достигалось за счет роста индукции МП при постоянной плотности тока. Поскольку сила Ампера пропорциональна индукции МП –  $F_A = IBl$ , то максимальная амплитуда механического импульса увеличивается пропорционально  $B$  и пластификация кристаллов должна расти. Действительно, в интервале  $B = 0 - 0,2 \text{ Тл}$  отношения ширины устья двойника  $h$  к средней длине двойника  $L$ , характеризующие степень некогерентности двойниковых границ, от индукции магнитного поля  $B$  (рисунок 5)

уменьшаются, т. е. наблюдается заметная пластификация. Далее этот эффект выходит на насыщение:  $h/L$  практически не уменьшаются с ростом индукции МП в интервале 0,2–0,35 Тл при постоянной плотности импульсного тока. Анализ хода линий на рисунке 6, где  $L$  – средняя длина двойника,  $d$  – средняя длина диагонали отпечатка, подтверждает этот вывод. В диапазоне 0,24–0,35 Тл линии графиков становятся практически параллельными оси абсцисс. Это означает, что длина двойников перестает увеличиваться, следовательно, возникают барьеры, препятствующие дальнейшему движению двойникообразующих дислокаций.



(1 – положительный заряд на плоскости (111),  
2 – отрицательный заряд на плоскости (111))

**Рисунок 5 – Зависимость степени некогерентности двойниковой границы  $h/L$  от индукции магнитного поля  $B$**



(1 – положительный заряд на плоскости (111),  
2 – отрицательный заряд на плоскости (111))

**Рисунок 6 – Зависимость отношения средней длины диагонали отпечатка  $d$  к средней длине двойника  $L$  от индукции магнитного поля  $B$**

Наиболее вероятной причиной насыщаемости эффекта дополнительного двойникования в этом случае может быть падение пластифицирующего влияния поверхностного электрического заряда при увеличении поверхностной плотности заряда. При микроиндицировании кристаллов висмута каждая из двойникообразующих дислокаций взаимодействует при своем движении со свободной поверхностью. Положительный и отрицательный поверхностные электрические заряды, возникающие при холловской поляризации образца, способствуют трансляции двойникообразующих дислокаций вдоль готовых границ раздела двойник-матрица [2].

Следует ожидать, что появление на свободной поверхности металла электрического заряда снижает значение поверхностной энергии  $\gamma$  на величину  $\Delta\gamma$ . В случае положительного значения  $\sigma$  поверхностная энергия уменьшается. Перемещение винтовой компоненты дислокации на расстояние, равное вектору Бюргерса  $b$ , приводит к появлению новой поверхности твердого тела площадью  $b^2$  (поверхностной ступеньки). Положительный заряд снижает работу по образованию новой поверхности на величину, равную  $\Delta\gamma b^2$ . В то же время, как показано в работах [9]–[11] при деформации заряженной поверхности твердого тела увеличивается энергия электрического поля на величину  $\Delta\omega$ . При наличии поверхностного заряда ступенька обладает электростатической энергией и для ее создания необходимо затратить дополнительную работу. Когда поверхностная плотность заряда на индентированной поверхности превышает экспериментально найденное значение  $\sigma \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}^2$ , эта работа становится велика и пластифицирующее влияние заряда снижается. Соответствующая напряженность электрического поля Холла в этом случае  $E_h = 30 \text{ В/м}$ . Как следствие, концентрация упругих напряжений на линии двойникования далее не уменьшается – степень некогерентности двойниковых границ  $h/L$  стремится к постоянному значению с ростом индукции МП.

В [2], [3] экспериментально установлено, что пластифицирующее влияние отрицательного поверхностного заряда приводит к увеличению ширины двойника у устья. Поскольку число двойникообразующих дислокаций на границе раздела двойник-материнский кристалл равно  $h/a$ , то можно сделать вывод о том, что отрицательный поверхностный электрический заряд стимулирует работу подповерхностных источников двойникообразующих дислокаций, которые играют большую роль при двойниковании. Зарождение дислокаций наиболее вероятно, когда поверхностные ступеньки поглощаются при зарождении петли двойникообразующей дислокации.

Присутствие отрицательного электрического заряда на свободной поверхности снижает термодинамический потенциал образования петли частичной дислокации радиуса  $r$  на величину, равную  $\Delta\mu r^2$  [12].

Выводы. Одновременное воздействие на кристаллы висмута импульсного электрического тока и постоянного МП существенно снижает среднюю линейную плотность двойникоющих дислокаций, локализованных на границах двойников, по причине разрядки упругих напряжений скоплений дислокаций.

Одновременное приложение постоянного МП и импульсов тока способствует трансляции двойникоющих дислокаций вдоль границ раздела двойник-материнский кристалл. При этом между микротвердостью кристаллов висмута и подвижностью двойникоющих дислокаций наблюдается обратная корреляция с коэффициентом  $r = -0,9$ .

Поверхностный электрический заряд, возникающий на свободной поверхности кристаллов висмута в результате холловской поляризации образца, стимулирует дополнительное двойникование в том случае, когда напряженность поперечного холловского поля не превышает значения  $E=30$  В/м. Этот электрический заряд оказывает упрочняющее действие после достижения поверхностной плотностью заряда величины  $\sigma \approx 3 \cdot 10^{-10}$  Кл/м<sup>2</sup>.

### Литература

1. Pinchook, A.I. Electroplastic effect under simultaneous superposition of electric and magnetic fields / A.I. Pinchook, V.S. Savenko // J. Appl. Phys. – 1999. – Vol. 86, № 5. – P. 2479–2482.
2. Пинчук, А.И. Пластификация монокристаллов висмута при одновременном наложении электрического и магнитного поля / А.И. Пинчук, В.С. Савенко, С.Д. Шаврей // Изв. РАН. Сер. Физика. – 1997. – Т. 61, № 5. – С. 932–936.
3. Plastification of Bismuth Crystals under Simultaneous Superposition of Electric and Magnetic Fields / V.S. Savenko [et al.] // Zeitschrift fur Metallkunde. – 1998. – № 7. – P. 498–500.
4. Электропластический эффект при одновременном наложении электрического и магнитного полей в области больших плотностей тока / В.С. Савенко [и др.] // Вестник БГУ. – Сер. 1. – 1996. – № 2. – С. 25–27.
5. Пинчук, А.И. Влияние электромагнитного поля на пластическую деформацию двойникования кристаллов висмута: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.04.07 / А.И. Пинчук. – Мозырь, 1998. – 115 с.
6. Косевич, А.М. Дислокационная теория упругого двойникования / А.М. Косевич, В.С. Бойко // УФН. – 1971. – Т. 104, вып. 2 – С. 201–255.
7. Грабко, Д.З. Механические свойства полуметаллов типа висмута / Д.З. Грабко, Ю.С. Боярская, М.П. Дынту. – Кишинев: Штиинца, 1982. – 132 с.
8. Башмаков, В.И. Двойникование кристаллов висмута при сложно-напряженном состоянии / В.И. Башмаков, В.С. Савенко // Физические свойства газов и твердых тел. – Минск, 1978. – С. 113–118.
9. Рошупкин, А.М. Физические основы электропластической деформации металлов / А.М. Рошупкин, И.Л. Батаронов // Изв. вузов. Физика. – 1996. – № 3. – С. 57–65.
10. Батаронов, И.Л. Электропластическая деформация металлов и динамический пинч-эффект / И.Л. Батаронов, А.М. Рошупкин // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1993. – № 8. – С. 57–64.
11. Баранов, Ю.В. Влияние электростатического поля на энергию образования поверхностной ступеньки в металле / Ю.В. Баранов, И.Л. Батаронов, А.М. Рошупкин // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1993. – № 8. – С. 64–67.
12. Хирт, Д. Теория дислокаций / Д. Хирт, И. Лоте. – М.: Мир. – 1972. – 589 с.

**В. В. Шепелевич, О. Н. Проц, А. В. Макаревич, Ю. А. Лукьянович**

### ТАЙНЫ ПЕРЕВЕРНУТОГО СТАКАНА

Рассмотрим известную экспериментальную задачу о перевернутом стакане ([1], задача №59; [2], задача №4.13), из которого не выливается вода.

*Нальем в стакан воды. Накроем стакан легкой крышкой (картонной или металлической) и, придерживая крышку ладонью, осторожно перевернем его вверх дном. Вода из стакана не выливается. Объяснить явление.*

В книге [1] в условии этой задачи отмечается, что стакан должен быть полным. Действительно, в случае неполного стакана возникает ситуация, когда на крышку перевернутого стакана действует сверху сила атмосферного давления находящегося в стакане воздуха плюс сила тяжести столба воды, а снизу – только сила атмосферного давления. Равнодействующая сила направлена вниз, и, казалось бы, вода неминуемо выльется.

Однако проведенные эксперименты свидетельствуют об обратном. Вода не выливается из перевернутого стакана и в случае его частичного заполнения.

Рассмотрим эти явления подробнее.

1. Пусть стакан заполнен водой до краев (рисунок 1а).

Перевернем стакан, накрытый крышкой, вверх дном (рисунок 1б).

Предполагая крышку невесомой, рассмотрим действующие на нее силы (силой поверхностного натяжения также пренебрегаем, а стенки стакана считаем тонкими). Вверх направлена сила давления атмосферы  $F_a$ , определяемая выражением:

$$F_a = p_a S, \quad (1)$$

где  $p_a$  – атмосферное давление,  $S$  – площадь крышки. Вниз направлены две силы: сила тяжести столба воды

$$F_t = \rho_b SHg, \quad (2)$$

где  $\rho_b$  – плотность воды,  $H$  – высота стакана, а также сила реакции  $N$ , действующая на крышку со стороны дна (через воду) и стенок стакана. Тогда условие равновесия сил принимает вид:

$$p_a S = \rho_b SH + N. \quad (3)$$

Поскольку сила атмосферного давления способна удержать столб воды высотой более 10 м, а высота стакана обычно намного меньше, то нереализованная часть силы атмосферного давления компенсируется реакцией опоры  $N$ .

2. Рассмотрим случай, когда стакан заполнен водой частично (рисунок 2а).

Перевернем частично заполненный стакан. В этом случае силы атмосферного давления, действующие на крышку сверху и снизу, компенсируются (рисунок 2,б). Остается некомпенсированной лишь сила тяжести воды

$$F_t = \rho_b Shg, \quad (4)$$

где  $h$  – высота уровня воды в стакане.

Кажется очевидным, что под действием этой силы крышка отпадет и вода выльется.

Почему же опыт свидетельствует о том, что вода не выливается?

Более внимательно проследим за водой на стыке крышки и стакана. Если использовать металлическую закаточную крышку, то можно видеть, что несколько капелек воды просочились из-под крышки.

На основании этого факта можно прийти к выводу, что в случае жесткой крышки вода частично выливается. (В случае гибкой крышки уровень воды может опуститься за счет прогиба крышки). Если этот факт не учитывать, то мы приходим к неразрешимому противоречию между экспериментом и теорией.

Попытаемся определить, как зависит масса вылившейся воды от высоты ее уровня в стакане.

Пусть масса вылившейся воды  $m_1$ . Тогда ее объем  $V_1$  можно определить по формуле  $m_1 = \rho_b V_1$ , откуда

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_b}. \quad (5)$$

Эта вылившаяся вода приведет к уменьшению высоты уровня жидкости на величину  $\Delta h$ , причем  $V_1 = S\Delta h$ , откуда

$$\Delta h = \frac{V_1}{S} = \frac{m_1}{\rho_b S}. \quad (6)$$

При опускании уровня воды объем воздуха в перевернутом стакане увеличивается, значит, воздух в стакане становится более разреженным и его давление  $p_1$  будет меньше атмосферного в соответствии с законом Бойля-Мариотта:

$$p_a(H-h)S = p_1(H-(h-\Delta h))S = p_1(H-h+\Delta h)S. \quad (7)$$

В полученном соотношении (7) содержатся две неизвестные величины  $p_1$  и  $\Delta h$ . Поэтому нам понадобится еще одно уравнение. В качестве такого уравнения используем условие равновесия давлений, действующих на крышку.

$$p_1 + \rho_b g(h - \Delta h) = p_a. \quad (8)$$

Из уравнения (8) выражаем  $p_1$ :

$$p_1 = p_a - \rho_b g(h - \Delta h) \quad (9)$$

и подставляем выражение (9) в (7), сокращая величину  $S$ :

$$p_a(H-h) = [p_a - \rho_b g(h - \Delta h)](H-h+\Delta h). \quad (10)$$

Из (10) видно, что мы получили квадратное уравнение относительно  $\Delta h$ . Представим это уравнение в каноническом виде:

$$\rho_b g(\Delta h)^2 + (\rho_b g(H-h) + p_a - \rho_b gh)\Delta h - \rho_b gh(H-h) = 0. \quad (11)$$

Запишем выражение для корней этого уравнения

$$\begin{aligned} \Delta h_{1,2} &= \frac{-(\rho_b gH + p_a - 2\rho_b gh) \pm \sqrt{(\rho_b gH + p_a - 2\rho_b gh)^2 + 4\rho_b^2 g^2 h(H-h)}}{2\rho_b g} \\ &= -\frac{H}{2} - \frac{p_a}{2\rho_b g} + h \pm \sqrt{\left(\frac{H}{2} + \frac{p_a}{2\rho_b g} - h\right)^2 + h(H-h)} = \\ &= -\frac{H}{2} - \frac{p_a}{2\rho_b g} + h \pm \sqrt{\frac{H^2}{4} + \frac{p_a^2}{4\rho_b^2 g^2} + \frac{p_a H}{2\rho_b g} - \frac{p_a h}{\rho_b g}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для анализа выражения (12) воспользуемся тем фактом, что атмосферное давление способно удержать столб воды более 10 м высотой:  $p_a = \rho_b gh$ , где  $h \approx 10$  м. Тогда  $\frac{p_a}{2\rho_b g} \approx 5$  м.

Обычно высота стакана  $H$  имеет порядок 0.1 м, поэтому  $\frac{H}{2} \ll \frac{p_a}{2\rho_b g}$ ,  $h \ll \frac{p_a}{2\rho_b g}$ . В связи с этим

сумма трех слагаемых перед корнем в типичных случаях отрицательна. Значит, чтобы получить положительное значение  $\Delta h$ , следует перед радикалом взять знак «+». Окончательно

$$\Delta h = -\frac{H}{2} - \frac{p_a}{2\rho_b g} + h + \sqrt{\frac{H^2}{4} + \frac{p_a^2}{4\rho_b^2 g^2} + \frac{p_a H}{2\rho_b g} - \frac{p_a h}{\rho_b g}}. \quad (13)$$

При необходимости можно определить массу вытекшей воды. Тогда следует подставить (13) в (6) и выразить  $m_1$ .

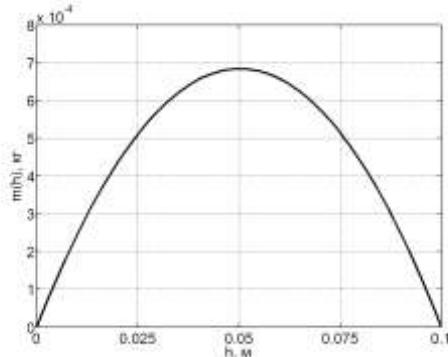
$$m_1 = \rho_b S \left( -\frac{H}{2} - \frac{p_a}{2\rho_b g} + h + \sqrt{\frac{H^2}{4} + \frac{p_a^2}{4\rho_b^2 g^2} + \frac{p_a H}{2\rho_b g} - \frac{p_a h}{\rho_b g}} \right). \quad (14)$$

Подставляя (13) в (9) легко определить давление воздуха  $p_1$  внутри перевернутого стакана:

$$p_1 = p_a - \rho_b g \left\{ \frac{H}{2} + \frac{p_a}{2\rho_b g} - \sqrt{\frac{H^2}{4} + \frac{p_a^2}{4\rho_b^2 g^2} + \frac{p_a H}{2\rho_b g} - \frac{p_a h}{\rho_b g}} \right\}. \quad (15)$$

Масса вытекшей жидкости оказывается функцией высоты уровня этой жидкости в стакане (см. выражение (14)). Построим график функции  $m(h)$  (рисунок 3). Из анализа графика следует, что масса вытекшей из стакана с крышкой воды при его перевороте вверх дном зависит от высоты столба воды, находящейся в стакане. Наибольшее количество воды (0.69 г) выльется, когда водой заполнена половина стакана ( $h = 0.5H$ ).

При расчете использовано значение нормального атмосферного давления  $p_a = 1.013 \cdot 10^5$  Па, ускорение свободного падения  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ , плотность воды  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$  [3], диаметр крышки  $d = 6 \text{ см}$ , высота стакана  $H = 10 \text{ см}$ .



**Рисунок 3 – График зависимости массы вытекшей из стакана воды от высоты столба воды в стакане**

исследования учащихся.

Кроме того, можно экспериментально проверить, что прокалывание крышки иголкой не приводит к изменению результатов опыта. Возникает задача: при каком диаметре отверстия в крышке вода выльется из стакана?

Можно также проверить, будет ли выливаться вода, если накрыть стакан полиэтиленовой пленкой или тканью.

Путем непосредственного наблюдения можно установить, что между металлической крышкой и нижней кромкой стакана существует небольшой зазор, заполненный водой. Как объяснить это явление? Какую роль оно играет при сравнении теоретической кривой  $m(h)$  с экспериментальными данными?

Можно усложнить задачу, приняв во внимание массу крышки, парциальное давление паров воды и др.

Это далеко не полный перечень исследовательских проблем, порождаемых рассмотренной выше задачей.

#### Литература

1. Горев, Л.А. Занимательные опыты по физике: [В 6-7 классах] / Л.А. Горев. – М.: Просвещение, 1977. – 21 с.
2. Уокер, Дж. Физический фейерверк / Дж. Уокер. – 2-е изд. Пер. с англ. под ред. И.Ш. Слободецкого. – М.: Мир, 1988. – 81 с.
3. Аксенович, Л.А. Физика в средней школе / Л.А. Аксенович, Н.Н. Ракина, К.С. Фарино; под ред. К.С. Фарино. – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2004. – 720 с.

**А. Э. Шмигирев, Э. Ф. Шмигирев**

### О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С УСЛОВИЕМ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ПОДГРУПП

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать обозначения из [1], [2].

Пусть  $F$  – произвольная непустая насыщенная наследственная формация. Напомним, что группа  $G$  называется группой с плотной системой  $F$ -субнормальных подгрупп, если для любых двух различных подгрупп  $H$  и  $K$  группы  $G$ , из которых первая содержится во второй и не максимальна в ней, в группе  $G$  существует такая  $F$ -субнормальная подгруппа  $N$ , что  $H \subseteq N \subseteq K$ . В этом случае также говорят, что множество  $F$ -субнормальных в  $G$  подгрупп плотно.

Группы с плотной системой  $F$ -субнормальных подгрупп, где  $F$  – либо некоторая насыщенная наследственная формация  $p$ -нильпотентных групп, либо некоторая насыщенная наследственная формация  $\varphi$ -дисперсивных групп, где  $\varphi$  – некоторое фиксированное линейное

упорядочение множества всех простых чисел, либо некоторая насыщенная наследственная формация сверхразрешимых групп были описаны в работах [3], [4].

В настоящей работе рассматриваются критерии разрешимости, когда  $G$  – группа с плотной системой  $F$ -субнормальных подгрупп, где  $F$  – произвольная насыщенная формация.

**Лемма 1.** Пусть  $F$  – непустая  $S$ -замкнутая насыщенная формация,  $H$  – подгруппа группы  $G$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

$$1) H^F \subseteq G^F;$$

2) если  $H$   $F$ -субнормальна в  $G$ , то  $H \cap N$   $F$ -субнормальна в  $N$ , где  $N$  – произвольная подгруппа из  $G$ ;

3) если  $H F$ -субнормальна в  $G$  и  $K$  – нормальная подгруппа в  $G$ , то  $HK F$ -субнормальна в  $G$ ;

4) если  $H$   $F$ -субнормальна в  $G$  и  $F$  является подформацией формации  $H$ , то  $H$   $H$ -субнормальна в  $G$ .

Следующая лемма отмечалась в работе [4], ее доказательство осуществляется прямой проверкой.

**Лемма 2.** Пусть  $F$  – непустая  $S$ -замкнутая насыщенная формация. Если множество всех  $F$ -субнормальных подгрупп плотно в группе  $G$ , то справедливы следующие утверждения:

1) если  $K$  – нормальная подгруппа в  $G$ , то в  $G/K$  множество всех  $F$ -субнормальных подгрупп плотно;

2) если  $M$  – подгруппа из  $G$ , то множество всех  $F$ -субнормальных подгрупп из  $M$  является плотным в  $M$ .

**Лемма 3.** Пусть  $F$  – непустая  $S$ -замкнутая насыщенная формация. Если  $H$  –  $F$ -субнормальная подгруппа группы  $G$ , то  $\pi(G : H) \subseteq \pi(F)$ .

**Доказательство.** По определению, существует цепь  $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_t = H$  такая, что  $G_i$  является  $F$ -нормальной максимальной подгруппой в  $G_{i-1}$  при любом  $i > 1$ . Таким образом,  $G_i \supseteq G_{i-1}^F$  и потому  $\pi(G_{i-1} : G_i) \subseteq \pi(G_{i-1} : G_{i-1}^F) \subseteq \pi(F)$  для каждого  $i > 1$ . Следовательно,  $\pi(G : H) \subseteq \pi(F)$ .

**Лемма 4.** Пусть  $F$  – непустая  $S$ -замкнутая насыщенная формация,  $G$  – группа, у которой множество всех ее  $F$ -субнормальных подгрупп плотно. Справедливы следующие утверждения:

1) если  $H$  –  $F$ -абнормальная максимальная подгруппа группы  $G$ , то либо  $H \in F$ , либо каждая  $F$ -абнормальная максимальная подгруппа из  $H$  принадлежит  $F$ ;

2) если  $M \subset H \subseteq G$  и  $H \in F$ , то  $M$  либо максимальна в  $H$ , либо  $F$ -субнормальна в  $G$ .

**Доказательство.** Докажем сначала 1). Пусть  $H$  –  $F$ -абнормальная максимальная подгруппа, не принадлежащая  $F$ . Допустим, что  $H$  обладает  $F$ -абнормальной максимальной подгруппой  $H_1$ , не принадлежащей  $F$ . Тогда в  $H_1$  имеется  $F$ -абнормальная максимальная подгруппа  $H_2$ . По условию, в  $G$  найдется такая  $F$ -субнормальная подгруппа  $N$ , что  $H_2 \subseteq N \subseteq H$ . Ясно, что  $N \neq H$ . По лемме 1,  $H_1^F \subseteq H^F \subseteq G^F$ . Так как  $N F$ -субнормальна, то она содержится в  $F$ -нормальной максимальной подгруппе, и поэтому  $NG^F \neq G$ . Значит,  $H_2 G^F \neq G$ .

Последнее противоречит следующему:

$$H_2 G^F = H_2 H_1^F G^F = H_1 G^F = H_1 H^F G^F = H G^F = G.$$

Докажем 2). Пусть  $M \subset H \subset G$  и  $H \in F$ . Допустим, что  $M$  не максимальна в  $H$ . По условию, в  $G$  найдется такая  $F$ -субнормальная подгруппа  $N$ , что  $M \subseteq N \subseteq H$ . Так как  $F$   $S$ -замкнута, то  $N \in F$ . Поэтому  $M F$ -субнормальна в  $N$ . Теперь ясно, что  $M F$ -субнормальна в  $G$ . Лемма доказана.

**Теорема 5.** Пусть  $F$  – непустая  $S$ -замкнутая насыщенная формация разрешимых групп,  $G$  – группа с плотной системой  $F$ -субнормальных подгрупп, не принадлежащая формации  $F$ . Тогда  $G$  разрешима.

**Доказательство.** Пусть  $G$  – группа минимального порядка, для которой лемма не верна.

Предположим, что  $G^F = G$ . Тогда каждая максимальная подгруппа группы  $G$  будет  $F$ -абнормальной в  $G$ . Пусть  $H$  некоторая неединичная силовская подгруппа группы  $G$ . Если предположить, что в  $H$  существует вторая максимальная подгруппа, то по условию найдется  $F$ -субнормальная в  $G$  подгруппа  $N$  такая, что  $H \supseteq N \supsetneq 1$ . Отсюда следует, что  $G^F \subset G$ . Противоречие. Следовательно,  $|H|$  – простое число. Получили, что каждая неединичная силовская подгруппа  $H$  из  $G$  имеет простой порядок и, значит,  $G$  разрешима, что противоречит нашему предположению.

Таким образом,  $G^F \subset G$  и  $G^F \neq 1$ . Если  $G^F \in F$ , то  $G^F$  – разрешимая группа по условию. Если же  $G^F \notin F$ , то  $G^F$  разрешим по индукции. Из того, что  $G/G^F \in F$  следует, что  $G$  разрешима. Лемма доказана.

**Теорема 6.** Пусть  $F$  – произвольная непустая насыщенная наследственная формация разрешимых групп.  $G$  – группа, не принадлежащая формации  $F$ , такая, что для любых двух различных не инвариантных в  $G$  подгрупп  $H$  и  $K$  группы  $G$ , из которых первая содержится во второй и не максимальна в ней, в группе  $G$  существует такая  $F$ -субнормальная подгруппа  $N$ , что  $H \subseteq N \subseteq K$ . Тогда группа  $G$  разрешима.

**Доказательство.** Пусть  $G$  – группа минимального порядка, для которой теорема не верна. В случае, если  $G^F \neq G$ , то  $G^F$  разрешимая группа по индукции. Из разрешимости факторгруппы  $G/G^F$  следует разрешимость и самой группы  $G$ .

#### Литература

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
3. Шеметков, Л.А. О конечных группах с плотной системой подгрупп/ Л.А. Шеметков, А.Э. Шмигирев // Доклады НАН Беларуси. – № 6. – 2004. – С. 29–31.
4. Шмигирев, А.Э. О конечных группах с условием плотности для обобщенно субнормальных подгрупп /А.Э. Шмигирев // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. – № 6. – 2004. – С. 130–149.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Астрейко Е.С., Астрейко Н.С., Астрейко С.Я.</b> ДИДАКТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ИЗОБРЕТАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ .....	5
<b>Бирук С.М</b> СУПЕРПОЗИЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПУАНКАРЕ И БЕНДИКСОНА .....	7
<b>Бондарь С.Р., Старовойтова О.В.</b> КРИТЕРИАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ТЕСТЫ В СИСТЕМЕ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ .....	13
<b>Войнова Я.А.</b> ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ .....	15
<b>Гуцко Н.В., Бондарь С.Р., Герасименок Т.С.</b> ПОСТРОЕНИЕ ВСЕГО МНОЖЕСТВА АВТОНОМНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ИМЕЮЩИХ ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ВИДЕ ОКРУЖНОСТИ .....	17
<b>Гуцко Н.В., Горбатова Ю.В.</b> РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ, ВОСХОДЯЩИХ К КЛАССИЧЕСКИМ РЕЗУЛЬТАТАМ ХУППЕРТА, АГРАВАЛЯ И АСААДА .....	22
<b>Гуцко Н.В., Игнатович С.В.</b> К ВОПРОСУ ИЗУЧЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА .....	26
<b>Давыдовская В.В., Шепелевич В.В.</b> ЗАВИСИМОСТЬ СТЕПЕНИ САМОФОКУСИРОВКИ ДВУМЕРНОГО СВЕТОВОГО ПУЧКА В ФОТОРЕФРАКТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ SBN ОТ НАПРАВЛЕНИЯ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ .....	31
<b>Дегтяр С.Н.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ТВОРЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ .....	34
<b>Дорошева Л.В.</b> РАЗВИТИЕ КРЕАТИВНОСТИ МЫШЛЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ДВИЖЕНИЕ И ФАЗЫ ЛУНЫ» В КУРСЕ АСТРОНОМИИ .....	36
<b>Дыба О.С.</b> ПОДГРУППОВОЙ $\square$ -ФУНКТОР $n$ -АРНОЙ ГРУППЫ.....	38
<b>Ефимчик И.А.</b> СОВРЕМЕННЫЙ УЧИТЕЛЬ ИНФОРМАТИКИ.....	40
<b>Ефремова М.И., Терещенко О.И.</b> МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ И ИХ ОСОБЕННОСТИ .....	43
<b>Иваненко Л.А., Актемирова Л.С.</b> СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В АМЕРИКАНСКОЙ ШКОЛЕ .....	46
<b>Иваненко Л.А., Лаврова Ж.А., Лавров М.И.</b> ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД ПРИ РЕШЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ .....	49
<b>Игнатович С.В.</b> САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ СТУДЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ .....	51
<b>Камыш А.А.</b> О КЛАССАХ ШУНКА $n$ -АРНЫХ ГРУПП.....	56
<b>Капора С.В., Прокопович Е.В., Савенко В.С., Басаргин В.П.</b> УЛЬТРААКУСТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ.....	57
<b>Ковальчук И.Н.</b> ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК НЕОБХОДИМЫЙ ИНСТРУМЕНТ ОРГАНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ.....	59

<b>Колядко Ж.В., Шепелевич В.В.</b> КОГЕРЕНТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОРТОГОНАЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ТЕМНЫХ ПУЧКОВ В КУБИЧЕСКОМ ФОТОРЕФРАКТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ.....	63
<b>Коршкова А.Ф.</b> ПРИЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ НА ПАССИВНОЙ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ .....	66
<b>Кулак Г.В., Г.В. Крох, Т.В. Николаенко</b> ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕССЕЛЬ-СУПЕРГАУССОВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ПРИ АКУСТООПТИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ.....	69
<b>Макаревич А.В., Шепелевич В.В.</b> МАКСИМАЛЬНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА ОБРАТНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ В ФОТОРЕФРАКТИВНОМ ПЬЕЗОКРИСТАЛЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СРЕЗА .....	73
<b>Николаенко Т.В.</b> АКУСТООПТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА ВОЛН ГУЛЯЕВА-БЛЮСТЕЙНА .....	77
<b>Овсиюк Е.М., Веко О.В., Казмерчук К.В.</b> ОБ УРАВНЕНИИ КОКСА ДЛЯ СКАЛЯРНОЙ ЧАСТИЦЫ С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ.....	79
<b>Овсиюк Е.М., Веко О.В., Казмерчук К.В.</b> ЧАСТИЦА СО СПИНОМ $S=1/2$ В КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕ СИТТЕРА: ОПИСАНИЕ В НЕСТАТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ.....	86
<b>Прокопович Е.В., Капора С.В., Савенко В.С.</b> ЭЛЕКТРОННЫЕ МЕХАНИЗМЫ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛОВ. РАСЧЕТ СОБСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКА ОБРАЗЦА .....	96
<b>Равуцкая Ж.И.</b> ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ ФИЗИКИ НА ОСНОВЕ ИДЕЙ ЛИЧНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПОДХОДА .....	98
<b>Савенко В.С.</b> ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ И РЕЗОНАНСНОЕ СПИНОВОЕ РАЗУПРОЧНЕНИЕ В МЕТАЛЛАХ .....	101
<b>Сергиеевич Н.В., Полоз М.И.</b> ЯДРО АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ТЕСТИРОВАНИЯ «MASTERTEST».....	105
<b>Терещенко О.И., Ефремова М.И.</b> МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ АКТИВИЗАЦИИ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ .....	109
<b>Шаврей С.Д.</b> ЗАВИСИМОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК ДВОЙНИКОВЫХ ГРАНИЦ ОТ ПАРАМЕТРОВ ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ....	114
<b>Шепелевич В.В., Проц О.Н., Макаревич А.В., Лукьянинич Ю.А.</b> ТАЙНЫ ПЕРЕВЕРНУТОГО СТАКАНА .....	119
<b>Шмигирев А.Э., Шмигирев Э.Ф.</b> О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С УСЛОВИЕМ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ПОДГРУПП.....	122