Министерство образования Республики Беларусь
Учебно-методическое объединение высших учебных заведений
Республики Беларусь по педагогическому образованию

УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель Министра
образования Республики Беларусь
______________ А.И. Жук
29.12.2008
Регистрационный № ТД - A.123 / тип.

АЛГЕБРА

Типовая учебная программа
для высших учебных заведений по специальностям:
1-02 05 01 Математика;
1-02 05 03 Математика. Дополнительная специальность

СОГЛАСОВАНО
Председатель учебно-методического
объединения высших учебных
заведений Республики Беларусь
по педагогическому образованию
______________ П.Д. Кухарчик
29.05.08

Начальник управления высшего и среднего
специального образования Министерства
образования Республики Беларусь
______________ Ю.И. Миксюк
29.12.2008

Первый проректор
Государственного учреждения образования
«Республиканский институт высшей школы»
______________ И.В. Казакова
18.12.2008

Эксперт-нормоконтролер
______________ И. Н. Корено
18.12.2008

Минск 2008

СОСТАВИТЕЛИ:
В.А. Янцевич, доцент кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат физико-математических наук, доцент;
О.А. Баркович, доцент кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат физико-математических наук, *доцент,*
М.В. Величко, преподаватель кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат физико-математических наук

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
Кафедра высшей алгебры Белорусского государственного университета;
В.И.Берник, главный научный сотрудник Института математики Национальной Академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ:
Кафедрой алгебры и геометрии учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка» (протокол № 9 от 17.04.08г.);

Научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка» (протокол № 4 от 15.05.2008 г.);

Научно-методическим советом по физико-математическому образованию и технологии учебно-методического объединения высших учебных заведений Республики Беларусь по педагогическому образованию (протокол № 2 от 16.05.2008 г.)

Ответственный за выпуск: Янцевич В.А.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Дисциплина «Алгебра» для педагогических университетов представляет собой естественное углубление и обобщение школьного курса алгебры с учетом достижений научно-технического прогресса, и профессиональной направленностью дисциплины. Знания, полученные при изучении дисциплины дают возможность будущему учителю математики грамотно преподавать алгебру в средней школе, вести факультативные занятия по алгебре (решение систем уравнений, решение алгебраических уравнений и др)

Полученные знания находят применение при изучении дисциплин «Математический анализ», «Геометрия», «Дифференциальные уравнения» и других.

Программа составлена в соответствии с требованиями образовательных стандартов по специальностям 1-02 05 01 «Математика»; 1-02 05 03 «Математика. Дополнительная специальность».

Общенаучная направленность дисциплины состоит в том, что студенты знакомятся с современным алгебраическим языком и символикой, с методами и приемами решения задач школьной алгебры, при решении которых используются фундаментальные методы и идеи современной алгебры.

С точки зрения профессиональной направленности дисциплина «Алгебра» занимает важное место в подготовке будущих учителей математики, так как некоторые вопросы (решение алгебраических уравнений, систем решение алгебраических уравнений) изучаются в курсе алгебры средней школы.

В результате изучения дисциплины «Алгебра» выпускник должен

<u>знать:</u>

- основные понятия линейной алгебры, теории многочленов, теории групп,колец и полей;
- формулу преобразования координат при переходе к новому базису;
- критерий совместности систем линейных уравнений;
- связь между матрицами линейного оператора в разных базисах;
- условие диагонализируемости матрицы линейного оператора;
- свойства знакоопределенных квадратичных форм;
- признак Эйзенштейна неприводимости полиномов над полем рациональных чисел;
- основную теорему о симметрических полиномах;
- критерий подгруппы, критерий подкольца, критерий идеала;
- критерий разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки;

<u>уметь:</u>

- выполнять арифметические действия над комплексными числами;
- выполнять операции над матрицами и вычислять определители;
- решать системы линейных уравнений;
- находить собственные значения и собственные векторы линейных операторов;

- находить наибольший общий делитель двух многочленов и его линейное представление;
- использовать схему Горнера для вычисления значения многочлена;
- определять кратность корней многочлена;
- находить рациональные корни многочлена с рациональными коэффициентами;
- применять результант двух полиномов к решению систем алгебраических уравнений;
- избавляться от иррациональности в знаменателе дроби.

Данная программа является основным документом, который определяет объем, содержание учебного материала по дисциплине «Алгебра». На ее основе в каждом учебном заведении соответствующими кафедрами разрабатываются рабочие учебные программы с учетом индивидуальных особенностей вуза и кафедры. Кафедрам предоставляется право изменять последовательность изучения тем. Некоторые вопросы программы по решению кафедр могут выноситься для самостоятельного изучения студентами.

Программа состоит из восьми разделов.

Раздел 1. «Целые числа» (Арифметика целых чисел. Свойства делимости целых чисел.).

Раздел 2. «Комплексные числа» (Определение комплексных чисел и действий над ними.).

Раздел 3. «Алгебраические структуры» (Группы, кольца, поля).

Раздел 4. «Матрицы, определители и системы линейных уравнений» (Теория матриц и определителей применяется к решению систем линейных уравнений.).

Раздел 5. «Линейные пространства» (Линейные и евклидовы пространства, их линейные операторы. Приложения линейных пространств.).

Раздел 6. «Полиномы от одной переменной» (Кольцо полиномов, алгебраические уравнения).

Раздел 7. «Полиномы от нескольких переменных» (Приложения полиномов от нескольких переменных к решению систем алгебраических уравнений и к задаче избавления от иррациональности в знаменателе дроби).

Раздел 8. «Расширения полей» (Алгебраические и трансцедентные расширения и их приложения).

В процессе реализации программы особое место должна занимать организация учебно-исследовательской работы студентов. Эта работа должна органично включаться в учебный процесс в сочетании со всеми видами учебных занятий.

Каждая тема позволяет организовать творческую самостоятельную работу студентов, которая будет способствовать становлению преподавателя-исследователя, обладающего значительным творческим потенциалом. Содержание и формы контролируемой самостоятельной работы студентов разрабатываются соответствующими кафедрами вуза и должны соответствовать целям и задачам подготовки специалистов.

Особое внимание следует обращать на организацию индивидуальной работы студентов под руководством преподавателя. Рекомендуется разработка системы индивидуальных заданий, которые студент должен выполнить на основе образцов, рассмотренных на лекциях и практических занятиях.

По всем разделам программы рекомендуется проведение коллоквиумов.

С целью текущего контроля рекомендуется проведение контрольных работ. Рекомендуется разработать систему индивидуальных домашних заданий.

Для контроля и самоконтроля знаний и умений студента по отдельным темам или разделам представляется целесообразным использование тестовых технологий.

Типовыми учебными планами по дисциплине «Алгебра» по специальностям: 1-02 05 01 Математика и 1-02 05 03 Математика. Дополнительная специальность отводится 660 часов. Из них 280 аудиторных (лекции - 140 часов; практические занятия - 124 часов; лабораторные работы - 16 часов).

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

№ пп	Название раздела, темы	Кол-во часов			
		Всего	Лекции	Практические занятия	Лаб. работы
1	Целые числа				
1.1	Отношение делимости в кольце целых чисел.	6	2	2	2
1.2	Деление с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.	8	4	2	2
2	Комплексные числа				
2.1	Определение комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа.	5	3	2	
2.2	Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.	7		2	2
3	Алгебраические структуры				
3.1	Алгебраические операции. Свойства ассоциативных алгебраических операций. Полугруппы. Группы. Подгруппы.	12	6	4	2
3.2	Кольца. Подкольца. Идеалы. Поля.	10	6	2	2
4	Матрицы, определители и системы линейных уравнений				
4.1	Матрицы. Операции над матрицами. Определители матриц и их свойства.	*10*	6	2	2
4.2	Системы линейных уравнений. Методы решения невырожденных систем линейных уравнений. Метод Гаусса.	10	4	4	2
5	Линейные пространства				
5.1	Линейные пространства. Линейные операторы.	44	22	22	
5.2	Евклидовы пространства. Квадратичные формы.	28	14	14	
6	Полиномы от одной переменной.				

6.1	Кольцо полиномов от одной переменной.	24	12	12	
6.2	Алгебраические уравнения.	12	6	6	
7	Полиномы от нескольких переменных.				
7.1	Полиномы от нескольких переменных.	20	10	10	
7.2	Симметрические полиномы от нескольких переменных.	14	8	6	
8	Группы и кольца.				
8.1	Алгебраические структуры.	16	8	8	
8.2	Факторгруппы и факторкольца.	14	6	6	*1*
9	Расширения полей.				
9.1	Простые, конечные и алгебраические расширения полей.	24	12	12	
9.2	Алгебраические замыкания.	16	8	8	
	ВСЕГО	280	140	124	16

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Целые числа

1.1 Отношение делимости в кольце целых чисел.

Арифметика целых чисел. Свойства делимости целых чисел.

1.2 Деление с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.

Деление с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Наименьшее общее кратное.

Раздел 2. Комплексные числа

2.1 Определение комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа.

Определение комплексных чисел. Операции с комплексными числами. Алгебраическая форма комплексных чисел. Геометрическая интерпретация комплексных чисел Модуль и аргумент комплексных чисел.

2.2 Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма комплексных чисел. Умножение, деление и возведение комплексных чисел в степень с целым показателем. Корень n-ой степени из комплексных чисел. Корни из единицы.

Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел (без доказательства).

Раздел 3. Алгебраические структуры

3.1 Алгебраические операции. Свойства ассоциативных алгебраических операций. Полугруппы. Группы. Подгруппы.

Алгебраическая операция. Ассоциативная алгебраическая операция. Полугруппы. Нейтральный элемент. Обратный элемент. Группы. Циклические группы. Группа подстановок. Подгруппа. Критерий подгруппы. Фактормножество группы по подгруппе. Смежные классы. Теорема Лагранжа.

3.2 Кольца. Подкольца. Идеалы. Поля.

Кольца. Делители нуля. Обратимые элементы. Группа обратимых элементов. Область целостности. Подкольца. Критерий подкольца. Поле.

Раздел 4. Матрицы, определители и системы линейных уравнений

4.1 Матрицы. Операции над матрицами. Определители матриц и их свойства.

Матрицы. Виды матриц. Умножение матриц на скаляр. Сложение и умножение матриц. Траспонирование матриц. Кольцо квадратных матриц. Полином от матрицы.

Определитель матрицы. Свойства определителя. Определитель произведения матриц.

Обратная матрица. Критерий существования обратной матрицы. Свойства обратных матриц.

Матричные уравнения.

***4.2* Системы линейных уравнений. Методы решения невырожденных систем линейных уравнений. Метод Гаусса.**

Системы линейных уравнений. Равносильные системы. Матричная запись системы линейных уравнений. Решение невырожденных систем линейных уравнений матричным способом. Формулы Крамера. Решение систем линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных.

Раздел 5. Линейные пространства

5.1 Линейные пространства. Линейные операторы.

Линейные пространства. Простейшие свойства. Подпространства. Критерий подпространства.

Линейная зависимость и независимость векторов. Критерий линейной зависимости. Основная лемма о линейной независимости.

Ранг системы векторов. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях. Максимальная линейно независимая подсистема и ее свойства. Ранг системы векторов и его свойства.

Ранг матрицы. Подпространство решений однородных систем. Критерий совместности системы линейных уравнений. Исследование количества решений систем линейных уравнений. Матрица системы векторов.

Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в данном базисе. Операции над векторами и их координатами. Матрица перехода от базиса к базису. Связь между координатами вектора в разных базисах.

Линейные отображения и их свойства. Образ и ядро линейного отображения. Изоморфизмы линейных пространств. Свойства изоморфных пространств. Критерий изоморфности конечномерных пространств.

Линейные операторы конечномерных пространств. Матрица линейного оператора в данном базисе и ее свойства. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.

Собственные векторы и собственные значения линейных операторов. Характеристический многочлен матрицы и линейного оператора. Свойства собственных векторов линейного оператора. Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов. Критерий диагонализируемости матрицы линейного оператора.

Алгебры. Линейные алгебры. Алгебры линейных операторов и алгебры матриц.

5.2 Евклидовы пространства. Квадратичные формы.

Скалярное произведение. Евклидовы пространства. Свойства евклидовых пространств. Норма вектора и ее свойства. Неравенство Коши-Буняковского.

Угол между векторами в евклидовом пространстве. Геометрия евклидовых пространств.

Ортогональные векторы. Ортогональный базис. Ортогонализационный процесс. Ортонормированный базис и его свойства.

Ортогональные операторы евклидовых пространств и их свойства. Матрица ортогонального оператора в ортонормированием базисе.

Самосопряженные операторы и их свойства. Собственные векторы и собственные значения самосопряженных линейных операторов.

Билинейные формы. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Линейная замена переменных в квадратичной форме. Канонический вид квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Приведение кривых и поверхностей второго порядка к главным осям. Классификация кривых и поверхностей второго порядка.

Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий знакоопределенности квадратичных форм. Закон инерции квадратичных форм.

Раздел 6. Полиномы от одной переменной

6.1 Кольцо полиномов от одной переменной.

Определение полинома от одной переменной над кольцом. Сложение и умножение полиномов. Кольцо полиномов. Стандартная запись полиномов. Степень полинома и ее свойства.

Делимость в кольце полиномов. Деление с остатком. Наибольший общий делитель полиномов. Алгоритм Евклида. Линейное выражение наибольшего общего делителя. Взаимно простые полиномы. Неприводимые полиномы. Каноническое разложение полиномов. Полиномы, неприводимые над полями комплексных и действительных чисел. Признак Эйзенштейна неприводимости полинома над полем рациональных чисел.

Функциональное и алгебраическое равенство полиномов. Корень полинома. Теорема Безу. Схема Горнера. Теоремы о рациональных корнях полиномов с целыми коэффициентами.

Производная полинома. Кратные множители и кратные корни. Формула Тейлора для полинома.

Теорема Виета.

6.2 Алгебраические уравнения.

Решение алгебраических уравнений 3-ей и 4 -ой степени.

Раздел 7. Полиномы от нескольких переменных

7.1 Полиномы от нескольких переменных.

Полиномы от нескольких переменных. Кольцо полиномов от нескольких переменных. Степени полиномов от нескольких переменных. Старшие члены полиномов. Лексикографическое упорядочение. Высшие члены полиномов.

7.2 Симметрические полиномы от нескольких нeременных.

Симметрические полиномы. Алгебраическая независимость. Элементарные симметрические полиномы и их алгебраическая независимость. Основная теорема о симметрических полиномах.

Дискриминант полинома. Результант полиномов. Приложение результанта к решению систем алгебраических уравнений.

Раздел 8. Группы и кольца

8.1 Алгебраические структуры.

Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Нормальные делители групп. Ядро гомоморфизма. Факторгруппы. Канонический гомоморфизм.

8.2 Факторгруппы и факторкольца.

Гомоморфизмы и изоморфизмы колец. Идеалы коммутативных колец. Критерий идеала. Ядро гомоморфизма. Факторкольцо. Канонический гомоморфизм. Простые идеалы. Максимальные идеалы. Главные идеалы. Кольца главных идеалов. Операции над идеалами.

Раздел 9. Расширения полей

9.1 Простые, конечные и алгебраические расширения полей.

Подполе и расширение поля. Простое расширение.

Конечные расширения полей. Алгебраические и трансцедентные элементы. Простое алгебраическое расширение. Алгебраические расширения полей. Алгебраичность конечного расширения. Избавление от иррациональности в знаменателе дроби.

9.2 **Алгебраические замыкания.**

Существование поля разложения полинома. Существование алгебраически замкнутого алгебраического расширения. Алгебраически замкнутые поля. Поле алгебраических чисел над полем рациональных чисел. Алгебраическое замыкание. Теорема о примитивном элементе.

Автоморфизмы полей.

Квадратичные расширения. Критерий разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки.

Поле частных области целостности. Трансцендентные расширения.

СПИСОК
основной и дополнительной литературы по дисциплине «Алгебра»

Основная литература

ГКострикин А.И. Основы алгебры. М: Физико-математическая литература, 2000. - 272 с.

2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. - 432 с.

3. Ляпин Е.С., Евсеев А.В. Алгебра и теория чисел. В 2 ч. М., Просвещение, 1974, 4.1. - 384 с; 1978, 4.2. - 448 с.

4. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. В 2 ч. Мн.: Амалфея, 2001.,ЧЛ. - 400 с; 2001,4.2. - 352 с.

5. Фаддеев Д.К., Лекции по алгебре. М: С-Пб, Лань, 2004. - 416 с.

6. Шнеперман Л.Б. Курс алгебра и теории чисел в задачах и упражнениях: В 2 ч. Мн.: Вышэйшая школа, 1986. Ч.1. - 274 с; 1987. 4.2, - 258 с.

7. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. Мн.: Вышэйшая школа, 1982. - 223 с.

Дополнительная литература

8. Баркович О.А. Алгебра: задания для практических занятий и самостоятельной работы : учеб.-метод, пособие. В 2 ч. 4. 1. Введение в алгебру. Мн.: БГПУ, 2005.- 134 с.

9. Баркович О.А. Алгебра: задания для практических занятий и самостоятельной работы : учеб.-метод, пособие. В 2 ч. 4. 2. Линейная алгебра. Мн.: БГПУ, 2006, - 112 с.

10. Винберг Э.Б. Алгебра многочленов. М.: Просвещение, 1979.- 175 с.

П.Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. - 252 с.

12. Кострикин А.И., Мании Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Изд-во Московского университета, 1980. - 319 с.

П.Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. М.: Просвещение, 1993. - 228 с.

14. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968. - 564 с.

15. Ляпин Е.С., Айзенштадт А.Я., Лесохин М.М. Упражнения по теории групп. М.: Наука, 1967. - 264 с.

16. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. М.: Просвещение, 1966. - 336 с.

17. Понтрягин Л.С. Алгебра. М.: Наука, 1987. - 135 с.

18. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1978.-384 с.

19. Размыслович Г.П., Феденя М.М., Ширяев В.М. Сборник задач по геометрии и алгебре. Мн.: Изд-во "Ушвератэцкае", 1999. - 393 с.

20. Сборник задач по алгебре (под ред. Кострикина А.И.) М: Наука, 1987. -352 с.

21. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. С-Пб.: Лань, 2001.-288 с.